

第一章 集合、常用逻辑用语、复数

第 1 节 集合

1. (2023·新课标 II 卷·高考真题) 设集合 $A = \{0, -a\}$, $B = \{1, a-2, 2a-2\}$, 若 $A \subseteq B$, 则 $a =$ ().

A. 2

B. 1

C. $\frac{2}{3}$

D. -1

1. 【答案】B

【分析】根据包含关系分 $a-2=0$ 和 $2a-2=0$ 两种情况讨论, 运算求解即可.

【详解】因为 $A \subseteq B$, 则有:

若 $a-2=0$, 解得 $a=2$, 此时 $A = \{0, -2\}$, $B = \{1, 0, 2\}$, 不符合题意;

若 $2a-2=0$, 解得 $a=1$, 此时 $A = \{0, -1\}$, $B = \{1, -1, 0\}$, 符合题意;

综上所述: $a=1$.

故选: B.

2. (2024·新课标 I 卷·高考真题) 已知集合 $A = \{x | -5 < x^3 < 5\}$, $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$ ().

A. $\{-1, 0\}$

B. $\{2, 3\}$

C. $\{-3, -1, 0\}$

D. $\{-1, 0, 2\}$

2. 【答案】A

【分析】化简集合 A, 由交集的概念即可得解.

【详解】方法一: 因为 $A = \{x | -\sqrt[3]{5} < x < \sqrt[3]{5}\}$, $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$, 且注意到 $1 < \sqrt[3]{5} < 2$,

从而 $A \cap B = \{-1, 0\}$.

故选: A.

方法二: 因为 $(-3)^3 = -27 < -5$, $(-1)^3 = -1 \in (-5, 5)$, $0^3 = 0 \in (-5, 5)$, $2^3 = 8 > 5$, $3^3 = 27 > 5$,

所以 $-1 \in A$, $0 \in A$, $-3 \notin A$, $2 \notin A$, $3 \notin A$, 所以 $A \cap B = \{-1, 0\}$, 故选 A.

3. (2024·北京·高考真题) 已知集合 $M = \{x | -3 < x < 1\}$, $N = \{x | -1 \leq x < 4\}$, 则 $M \cup N =$ ().

A. $\{x | -1 \leq x < 1\}$

B. $\{x | x > -3\}$

C. $\{x | -3 < x < 4\}$

D. $\{x | x < 4\}$

【答案】C

【分析】直接根据并集含义即可得到答案.

【详解】由题意得 $M \cup N = \{x | -3 < x < 4\}$.

故选：C.

4. (2025·全国一卷·高考真题) 设全集 $U = \{x | x \text{ 是小于9的正整数}\}$, 集合 $A = \{1, 3, 5\}$, 则 $\complement_U A$ 中元素个数为 ().

A. 0

B. 3

C. 5

D. 8

【答案】C

【分析】根据补集的定义即可求出.

【详解】因为 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 所以 $\complement_U A = \{2, 4, 6, 7, 8\}$, $\complement_U A$ 中的元素个数为5,

故选：C.

5. (2024·全国甲卷·高考真题) 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $B = \{x | \sqrt{x} \in A\}$, 则 $\complement_A (A \cap B) = ()$.

A. $\{1, 4, 9\}$

B. $\{3, 4, 9\}$

C. $\{1, 2, 3\}$

D. $\{2, 3, 5\}$

【答案】D

【分析】由集合 B 的定义求出 B , 结合交集与补集运算即可求解.

【详解】因为 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $B = \{x | \sqrt{x} \in A\}$, 所以 $B = \{1, 4, 9, 16, 25, 81\}$,

则 $A \cap B = \{1, 4, 9\}$, $\complement_A (A \cap B) = \{2, 3, 5\}$

故选：D

6. (2023·全国甲卷·高考真题) 设全集 $U = \mathbb{Z}$, 集合 $M = \{x | x = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{x | x = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}\}$, $\complement_U (M \cup N) = ()$.

A. $\{x | x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$

B. $\{x | x = 3k - 1, k \in \mathbb{Z}\}$

C. $\{x | x = 3k - 2, k \in \mathbb{Z}\}$

D. $\emptyset$

【答案】A

【分析】根据整数集的分类, 以及补集的运算即可解出.

【详解】因为整数集 $\mathbb{Z} = \{x | x = 3k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x | x = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x | x = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}\}$, $U = \mathbb{Z}$,

所以, $\complement_U (M \cup N) = \{x | x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$.

故选：A.

第 2 节 常用逻辑用语

1. (2022 · 浙江 · 高考真题) 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 “ $\sin x = 1$ ” 是 “ $\cos x = 0$ ” 的 ().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【分析】由三角函数的性质结合充分条件、必要条件的定义即可得解.

【详解】因为 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 可得:

当 $\sin x = 1$ 时, $\cos x = 0$, 充分性成立;

当 $\cos x = 0$ 时, $\sin x = \pm 1$, 必要性不成立;

所以当 $x \in \mathbf{R}$, $\sin x = 1$ 是 $\cos x = 0$ 的充分不必要条件.

故选: A.

2. (2022 · 天津 · 高考真题) “ x 为整数” 是 “ $2x+1$ 为整数” 的 ().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【分析】由当 x 为整数时, $2x+1$ 必为整数; 当 $2x+1$ 为整数时, x 不一定为整数; 即可选出答案.

【详解】当 x 为整数时, $2x+1$ 必为整数;

当 $2x+1$ 为整数时, x 不一定为整数,

例如当 $2x+1=2$ 时, $x=\frac{1}{2}$.

所以 “ x 为整数” 是 “ $2x+1$ 为整数” 的充分不必要条件.

故选: A.

3. (2024 · 天津 · 高考真题) 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 “ $a^3 = b^3$ ” 是 “ $3^a = 3^b$ ” 的 ().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【分析】说明二者与同一个命题等价, 再得到二者等价, 即是充分必要条件.

【详解】根据立方的性质和指数函数的性质, $a^3 = b^3$ 和 $3^a = 3^b$ 都当且仅当 $a = b$, 所以二者互为充要条件.

故选: C.

4. (2024 · 全国甲卷 · 高考真题) 设向量 $\vec{a} = (x+1, x)$, $\vec{b} = (x, 2)$, 则 ().

- A. “ $x = -3$ ” 是 “ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ” 的必要条件 B. “ $x = 1 + \sqrt{3}$ ” 是 “ $\vec{a} // \vec{b}$ ” 的必要条件
C. “ $x = 0$ ” 是 “ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ” 的充分条件 D. “ $x = -1 + \sqrt{3}$ ” 是 “ $\vec{a} // \vec{b}$ ” 的充分条件

【答案】C

【分析】根据向量垂直和平行的坐标表示即可得到方程，解出即可。

【详解】对 A，当 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 时，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，

所以 $x \cdot (x+1) + 2x = 0$ ，解得 $x = 0$ 或 -3 ，即必要性不成立，故 A 错误；

对 C，当 $x = 0$ 时， $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = (0, 2)$ ，故 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，

所以 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，即充分性成立，故 C 正确；

对 B，当 $\vec{a} // \vec{b}$ 时，则 $2(x+1) = x^2$ ，解得 $x = 1 \pm \sqrt{3}$ ，即必要性不成立，故 B 错误；

对 D，当 $x = -1 + \sqrt{3}$ 时，不满足 $2(x+1) = x^2$ ，所以 $\vec{a} // \vec{b}$ 不成立，即充分性不立，故 D 错误。

故选：C。

5. (2023 · 北京 · 高考真题) 若 $xy \neq 0$ ，则 “ $x + y = 0$ ” 是 “ $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = -2$ ” 的 ().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【分析】解法一：由 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$ 化简得到 $x + y = 0$ 即可判断；解法二：证明充分性可由 $x + y = 0$ 得到

$x = -y$ ，代入 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ 化简即可，证明必要性可由 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$ 去分母，再用完全平方公式即可；解法三：

证明充分性可由 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ 通分后用配凑法得到完全平方公式，再把 $x + y = 0$ 代入即可，证明必要性可由

$\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ 通分后用配凑法得到完全平方公式，再把 $x + y = 0$ 代入，解方程即可。

【详解】解法一：

因为 $xy \neq 0$ ，且 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$ ，

所以 $x^2 + y^2 = -2xy$ ，即 $x^2 + y^2 + 2xy = 0$ ，即 $(x + y)^2 = 0$ ，所以 $x + y = 0$ 。

所以 “ $x + y = 0$ ” 是 “ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$ ” 的充要条件。

解法二：

充分性：因为 $xy \neq 0$ ，且 $x+y=0$ ，所以 $x=-y$ ，

$$\text{所以 } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{-y}{y} + \frac{y}{-y} = -1 - 1 = -2,$$

所以充分性成立；

必要性：因为 $xy \neq 0$ ，且 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$ ，

$$\text{所以 } x^2 + y^2 = -2xy, \text{ 即 } x^2 + y^2 + 2xy = 0, \text{ 即 } (x+y)^2 = 0, \text{ 所以 } x+y=0.$$

所以必要性成立.

所以“ $x+y=0$ ”是“ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$ ”的充要条件.

解法三：

充分性：因为 $xy \neq 0$ ，且 $x+y=0$ ，

$$\text{所以 } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x^2 + y^2 + 2xy - 2xy}{xy} = \frac{(x+y)^2 - 2xy}{xy} = \frac{-2xy}{xy} = -2,$$

所以充分性成立；

必要性：因为 $xy \neq 0$ ，且 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$ ，

$$\text{所以 } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x^2 + y^2 + 2xy - 2xy}{xy} = \frac{(x+y)^2 - 2xy}{xy} = \frac{(x+y)^2}{xy} = -2,$$

$$\text{所以 } \frac{(x+y)^2}{xy} = 0, \text{ 所以 } (x+y)^2 = 0, \text{ 所以 } x+y=0,$$

所以必要性成立.

所以“ $x+y=0$ ”是“ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$ ”的充要条件.

故选：C

6. (2024·上海·高考真题) 定义一个集合 Ω ，集合中的元素是空间内的点集，任取 $P_1, P_2, P_3 \in \Omega$ ，

存在不全为 0 的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ，使得 $\lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OP_2} + \lambda_3 \overrightarrow{OP_3} = \vec{0}$ 。已知 $(1, 0, 0) \in \Omega$ ，则 $(0, 0, 1) \notin \Omega$ 的充分条件是 ()。

A. $(0, 0, 0) \in \Omega$

B. $(-1, 0, 0) \in \Omega$

C. $(0, 1, 0) \in \Omega$

D. $(0, 0, -1) \in \Omega$

【答案】C

【分析】首先分析出三个向量共面，显然当 $(1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0) \in \Omega$ 时，三个向量构成空间的一个基底，则即可分析出正确答案.

【详解】由题意知这三个向量 $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}$ 共面，即这三个向量不能构成空间的一个基底，

对 A，由空间直角坐标系易知 $(0,0,0), (1,0,0), (0,0,1)$ 三个向量共面，则当 $(0,0,0), (1,0,0) \in \Omega$ 无法推出 $(0,0,1) \notin \Omega$ ，故 A 错误；

对 B，由空间直角坐标系易知 $(-1,0,0), (1,0,0), (0,0,1)$ 三个向量共面，则当 $(-1,0,0), (1,0,0) \in \Omega$ 无法推出 $(0,0,1) \notin \Omega$ ，故 B 错误；

对 C，由空间直角坐标系易知 $(1,0,0), (0,0,1), (0,1,0)$ 三个向量不共面，可构成空间的一个基底，则由 $(1,0,0), (0,1,0) \in \Omega$ 能推出 $(0,0,1) \notin \Omega$ ，

对 D，由空间直角坐标系易知 $(1,0,0), (0,0,1), (0,0,-1)$ 三个向量共面，

则当 $(0,0,-1), (1,0,0) \in \Omega$ 无法推出 $(0,0,1) \notin \Omega$ ，故 D 错误。

故选：C。

第 3 节 复数

1. (2025 · 全国一卷 · 高考真题) $(1+5i)i$ 的虚部为 ().

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 6

【答案】C

【分析】根据复数代数形式的运算法则以及虚部的定义即可求出.

【详解】因为 $(1+5i)i = i + 5i^2 = -5 + i$ ，所以其虚部为 1，

故选：C.

2. (2022 · 全国乙卷 · 高考真题) 已知 $z = 1 - 2i$ ，且 $z + a\bar{z} + b = 0$ ，其中 a, b 为实数，则 ().

- A. $a = 1, b = -2$ B. $a = -1, b = 2$ C. $a = 1, b = 2$ D. $a = -1, b = -2$

【答案】A

【分析】先算出 $\bar{z}$ ，再代入计算，实部与虚部都为零解方程组即可

【详解】 $z = 1 - 2i$

$$z + a\bar{z} + b = 1 - 2i + a(1 + 2i) + b = (1 + a + b) + (2a - 2)i$$

由 $z + a\bar{z} + b = 0$ ，结合复数相等的充要条件为实部、虚部对应相等，

$$\text{得} \begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ 2a - 2 = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

故选：A

3. (2022 · 新高考全国 I 卷 · 高考真题) 若 $i(1-z) = 1$ ，则 $z + \bar{z} =$ ().

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

【答案】D

【分析】利用复数的除法可求 z ，从而可求 $z + \bar{z}$ 。

【详解】由题设有 $1 - z = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$ ，故 $z = 1 + i$ ，故 $z + \bar{z} = (1 + i) + (1 - i) = 2$ ，

故选：D

4. (2025 · 北京 · 高考真题) 已知复数 z 满足 $i \cdot z + 2 = 2i$ ，则 $|z| =$ ().

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. 8

【答案】B

【分析】先求出复数 z ，再根据复数模的公式即可求出.

【详解】由 $i \cdot z + 2 = 2i$ 可得， $z = \frac{-2 + 2i}{i} = 2 + 2i$ ，所以 $|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ ，

故选：B.

5. (2024 · 上海 · 高考真题) 已知虚数 z ，其实部为 1，且 $z + \frac{2}{z} = m (m \in \mathbf{R})$ ，则实数 m 为_____.

【答案】2

【分析】设 $z = 1 + bi, b \in \mathbf{R}$ 且 $b \neq 0$ ，直接根据复数的除法运算，再根据复数分类即可得到答案.

【详解】设 $z = 1 + bi, b \in \mathbf{R}$ 且 $b \neq 0$.

$$\text{则 } z + \frac{2}{z} = 1 + bi + \frac{2}{1 + bi} = \left(\frac{b^2 + 3}{1 + b^2} \right) + \left(\frac{b^3 - b}{1 + b^2} \right) i = m,$$

$$\because m \in \mathbf{R}, \therefore \begin{cases} \frac{b^2 + 3}{1 + b^2} = m \\ \frac{b^3 - b}{1 + b^2} = 0 \end{cases}, \text{解得 } m = 2,$$

故答案为：2.

6. (2025 · 上海 · 高考真题) 已知复数 z 满足 $z^2 = (\bar{z})^2, |z| \leq 1$ ，则 $|z - 2 - 3i|$ 的最小值是_____.

【答案】 $2\sqrt{2}$

【分析】先设 $z = a + bi$ ，利用复数的乘方运算及概念确定 $ab = 0$ ，再根据复数的几何意义数形结合计算即可.

【详解】设 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R}), \therefore \bar{z} = a - bi$,

由题意可知 $z^2 = a^2 + 2abi - b^2 = \bar{z}^2 = a^2 - 2abi - b^2$ ，则 $ab = 0$ ，

又 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \leq 1$ ，由复数的几何意义知 z 在复平面内对应的点 $Z(a, b)$ 在单位圆内部（含边界）的坐标轴上运动，如图所示即线段 AB, CD 上运动，

设 $E(2, 3)$ ，则 $|z - 2 - 3i| = |ZE|$ ，由图象可知 $|BE| = \sqrt{10} > |CE| = 2\sqrt{2}$ ，

所以 $|ZE|_{\min} = 2\sqrt{2}$.

故答案为： $2\sqrt{2}$

