



黄埔教研
HUANGPUJIAOYAN

高中数学一轮复习

2.2 函数的单调性与最值

广州知识城中学 陈素清



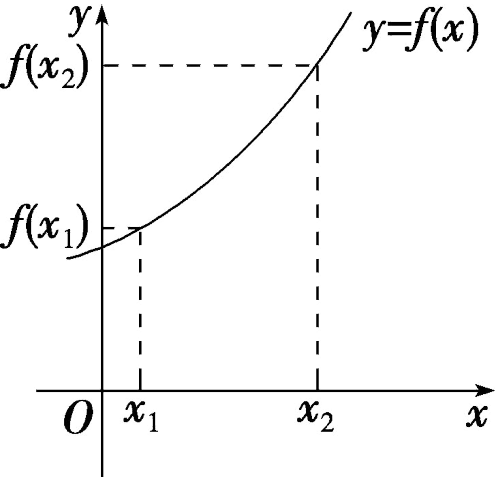
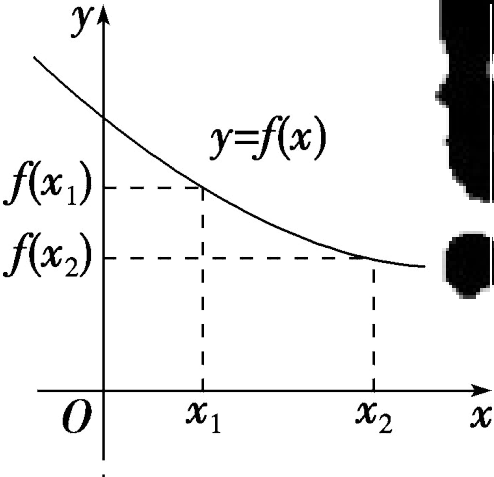
1. 函数的单调性

(1) 单调递增和单调递减

类别		单调递增	单调递减
定义	① $x_1, x_2 \in I, \Rightarrow x_1 < x_2$ 时	未①	未① $x_1, x_2 \in I, \Rightarrow x_1 < x_2$ 时
	② 一般地, 设函数的定义域为 I , 区间 $D \subset I$, 如果对于区间 D 内的任意两个自变量 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是单调递增的.	都有②	都有③
	③ 要求 $f(x_1) < f(x_2)$	都有③	都有②
	④ 结论与要求相反	都有④	都有④
定义	要求与结论	都有⑤	都有⑤

单调性



类别	单调递增	单调递减
图象描述	 上升的	 下降的

单调



(2) 单调区间的定义

如果函数在区间 I 上单调⑧ **递增** 或单调⑨ **递减**，那么就称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上具有**严格的单调性**，区间 I 叫做函数 $y=f(x)$ 的⑩ **单调区间**。

提醒 (1) 单调区间只能用区间表示，不能用不等式表示；

(2) 有多个单调区间应分开写，不能用“ $\cup$ ”连接，也不能用“或”连接，只能用“**，**”或**和**连接。

【2020·山东·高考真题】已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$ ，若对于任意两个不相等的实数 x_1, x_2 ，总有

$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ 成立，则函数 $f(x)$ 一定是 ()

A . 奇函数

B . 偶函数

C . 增函数

D . 减函数

【详解】对于任意两个不相等的实数 x_1, x_2 ，总有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ 成立，

等价于对于任意两个不相等的实数 $x_1 < x_2$ ，总有 $f(x_1) < f(x_2)$ 。

所以函数 $f(x)$ 一定是增函数。

故选：C

真题



记一记

1. 函数单调性的两个等价结论

设 $\forall x_1, x_2 \in D (x_1 \neq x_2)$, 则

(1) $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ (或 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$) $\Leftrightarrow f(x)$ 在 D 上单调递增.

(2) $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ (或 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$) $\Leftrightarrow f(x)$ 在 D 上单调递减.

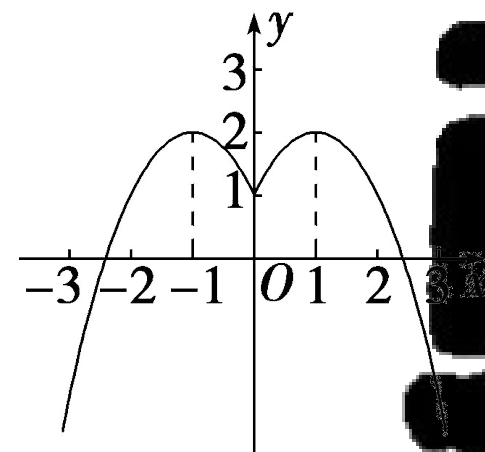
单调性

考点一 函数的单调性（区间）

例1 (1) 求函数 $f(x) = -x^2 + 2|x| + 1$ 的单调区间；

【解】由题得 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 1, & x \geq 0, \\ -x^2 - 2x + 1, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -(x-1)^2 + 2, & x \geq 0, \\ -(x+1)^2 + 2, & x < 0. \end{cases}$

画出函数 $f(x)$ 的图象如图所示，可知单调递增区间为 $(-\infty, -1]$ 和 $[0, 1]$ ，单调递减区间为 $[-1, 0]$ 和 $(1, +\infty)$ 。





【2】判断函数 $f(x) = \frac{x-3}{x+2}, x \in (-2, +\infty)$ 的单调性，并用单调性的定义证明你的结论.

【解】函数 $f(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增. 证明如下:

$$f(x) = \frac{x-3}{x+2} = \frac{x+2-5}{x+2} = 1 - \frac{5}{x+2},$$

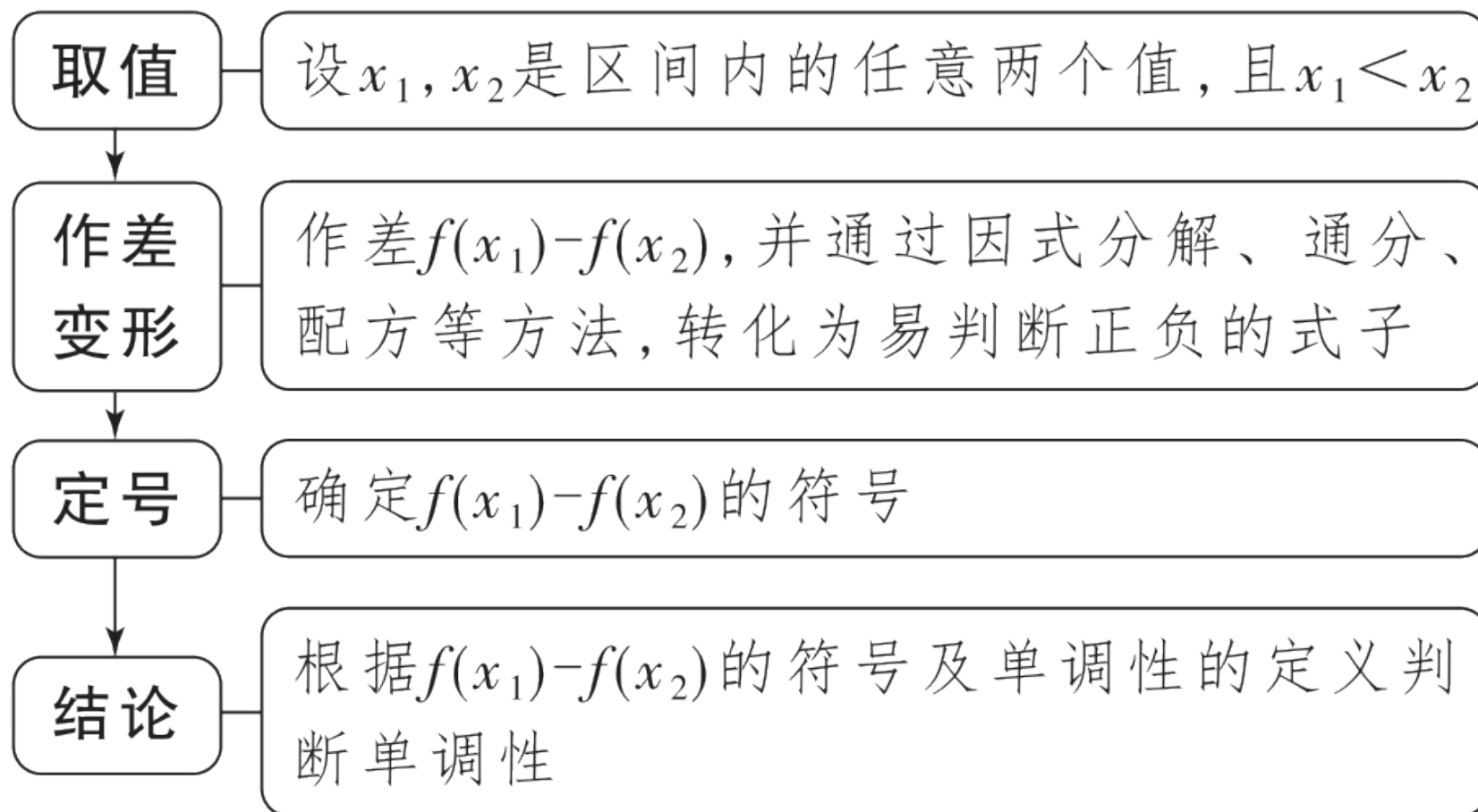
任取 $x_1, x_2 \in (-2, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 则

$$f(x_1) - f(x_2) = 1 - \frac{5}{x_1+2} - \left(1 - \frac{5}{x_2+2}\right) = \frac{5}{x_2+2} - \frac{5}{x_1+2} = \frac{5(x_1 - x_2)}{(x_1+2)(x_2+2)},$$

又 $x_1 < x_2$, 所以 $x_1 - x_2 < 0$, 又 $x_1, x_2 \in (-2, +\infty)$, 所以 $x_1 + 2 > 0, x_2 + 2 > 0$, 所以

$f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$,

故函数 $f(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增.



单调性

1. 若函数 $y = (2k + 1)x + 1$ 在 $\mathbb{R}$ 上是减函数，则实数 k 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ ：

解析：由题知 $2k + 1 < 0$ ，即 $k < -\frac{1}{2}$ 。

黄浦

2. 函数 $f(x) = x^2 + 2x + 1$ 的单调递减区间是_____.

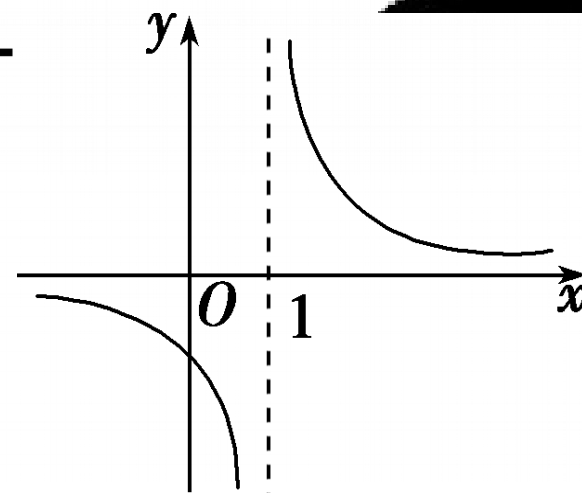
答案: $(-\infty, -1]$

单调

3. 函数 $y = \frac{1}{x-1}$ 的单调递减区间为_____.

解析： $y = \frac{1}{x-1}$ 的图象可由函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象向右平移一个单位得到，如图所示，其单调递减区间为 $(-\infty, 1)$ 和 $(1, +\infty)$.

答案： $(-\infty, 1)$ 和 $(1, +\infty)$



① 平移 ② $y' = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0$

复合函数单调性：同增异减



黄浦教研
HUANGPU JIAOYAN

【2017·全国·高考真题】函数 $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 8)$ 的单调递增区间是 ()

A. $(-\infty, -2)$

B. $(-\infty, 1)$

C. $(1, +\infty)$

D. $(4, +\infty)$

【详解】由 $x^2 - 2x - 8 > 0$ 得： $x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$ ，

令 $t = x^2 - 2x - 8$ ，则 $y = \ln t$ ，

$\because x \in (-\infty, -2)$ 时， $t = x^2 - 2x - 8$ 为减函数；

$x \in (4, +\infty)$ 时， $t = x^2 - 2x - 8$ 为增函数；

$y = \ln t$ 为增函数，

故函数 $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 8)$ 的单调递增区间是 $(4, +\infty)$ ，

故选 D.

单调

判断函数单调性常用的四种方法

(1) 定义法：取值、作差、变形（因式分解、配方、有理化、通分）、定号、下结论.

(2) 复合法：同增异减，即内外函数的单调性相同时为增函数，不同时为减函数.

(3) 图象法：如果是图象形式给出的，或者 $f(x)$ 的图象易作出，可由图象直观地判断函数的单调性.

(4) 导数法：利用导函数的正负判断函数的单调性.

M 是 D , 即有 $M \subseteq D$.
 M 是 D , 使得 $M \subseteq D$.
 D , 即有 $M \subseteq D$.
 D , 即有 $M \subseteq D$.

前提	件一般地, 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在实数 M 满足	(1) $\forall x \in D$, 都有 $f(x) \leq M$	(2) $\exists x_0 \in D$, 使得 $f(x_0) = M$
条件	得 (12)	(1) $\forall x \in D$, 都有 $f(x) \leq M$	(2) $\exists x_0 \in D$, 使得 $f(x_0) = M$
结论	得 (12)	(1) $\forall x \in D$, 都有 $f(x) \leq M$	(2) $\exists x_0 \in D$, 使得 $f(x_0) = M$
	, 使得 (12)	, 使得 (12)	, 使得 (12)
结论	为最大值	为最小值	



考点二 函数的最值



黄浦教研
HUANGPU JIAOYAN

例2 (1) (一题多解) 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \geq 1, \\ -x^2 + 2, & x < 1 \end{cases}$ 的值域为_____

思路一：图象法，作出函数的图象，观察其图象。

思路二：单调性法，确定函数的单调性，再由单调性求最值。

求分段函数的最值时，应先求出每一段上的最值，再选取其中最大的作为分段函数的最大值，最小的作为分段函数的最小值。

函数

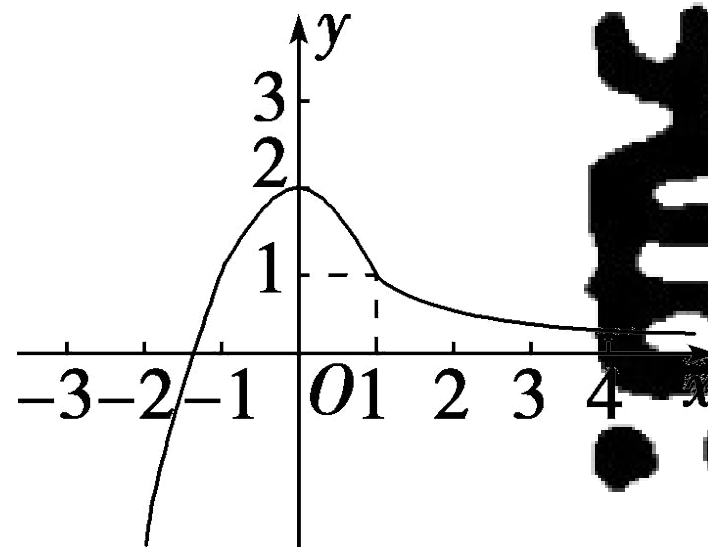


解析：方法一（图象法）：作出函数

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \geq 1, \\ -x^2 + 2, & x < 1 \end{cases}$ 的图象（如图所示），

$$f(x)_{\max} = f(0) = 2.$$

由函数图象可知， $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, 2]$.





方法二（单调性法）：

当时 $x \geq 1$ ，函数单调递减，所以 $f(x)$ 在
处取得最大值，最大值为 $f(1) = 1$ ；

当 $x < 1$ 时，易知函数 $f(x) = -x^2 + 2$ 在 $x = 0$ 处取得最大值，
最大值为 $f(0) = 2$. 综上，函数 $f(x)$ 的最大值为2，
所以函数的值域为 $(-\infty, 2]$.



(2) 函数 $y = x + \sqrt{x-1}$ 的最小值为 1.

思路：换元法，令 $t = \sqrt{x-1}$ ，且 $t \geq 0$ ，则原函数变为 $y = t^2 + 1 + t$ ，利用二次函数的性质求最小值.

解析：（换元法）：令 $t = \sqrt{x-1}$ ，且 $t \geq 0$ ，则 $x = t^2 + 1$ ，所以原函数变为 $y = t^2 + 1 + t$ ， $t \geq 0$ ，配方得 $y = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ 。又因为 $t \geq 0$ ，所以 $y \geq \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ ，故函数 $y = x + \sqrt{x-1}$ 的最小值为 1.



利用导数研究函数的最值

(3) 已知函数 $f(x) = \ln x + 2x + \frac{3}{x}$, 则 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上的最大值为

(参考数据: $\ln 2 \approx 0.69$) ()

A.3

☒ B. $7 - \ln 2$

C.5

D. $\frac{11}{2} + \ln 2$

A.3

B.

C.5

解析: $f'(x) = \frac{1}{x} + 2 - \frac{3}{x^2} = \frac{2x^2 + x - 3}{x^2} = \frac{(x-1)(2x+3)}{x^2} (x > 0),$

所以当 $x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

黄浦



{4}: 函数 $y = \frac{x^2+2}{\sqrt{1+x^2}}$ 的值域是_____.

解析: 由题意知, 函数的定义域为 $\mathbb{R}$,

$$y = \frac{x^2+2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{(x^2+1)+1}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

基本不等式求最值

当且仅当 $\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ($t \geq 1$), 则 $y = t + \frac{1}{t} \geq 2$, $\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 1$,
因此函数的最小值为 2, 函数无最大值, 即函数的值域是
当且仅当 $t = \frac{1}{t}$, 即 $t = 1$, $x = 0$ 时, 取等号.

因此函数的最小值为 2, 函数无最大值, 即函数的值域是 $[2, +\infty)$.

黄浦



求函数最值（值域）的五种常用方法及注意点

- 〔 1 〕 图象法：先作出函数的图象，再观察其最高点、最低点，求出最值。
- 〔 2 〕 单调性法：先确定函数的单调性，再由单调性求最值。
- 〔 3 〕 换元法：对比较复杂的函数可通过换元转化为熟悉的函数，再用相应的方法求最值。
- 〔 4 〕 基本不等式法：先对解析式变形，使之具备“一正二定三相等”的条件后用基本不等式求出最值。
- 〔 5 〕 导数法：先求导，然后求出在给定区间上的极值，最后结合端点值求出最值。

真
91



【注意】（1）求函数的最值时，应先确定函数的定义域。

（2）求分段函数的最值时，应先求出每一段上的最值，再选取其中最大的作为分段函数的最大值，最小的作为分段函数的最小值。

最大值



黄埔教研
HUANGPUJIAOYAN

谢谢

