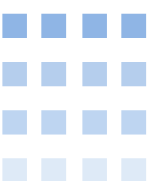


第 4 节：动态平衡、平衡中的临界与极值问题

广州市第二中学 倪寿荣



1. 学会运用解析法、图解法等分析处理动态平衡问题。
2. 会分析平衡中的临界与极值问题，并会相关计算。

動態平衡

考点

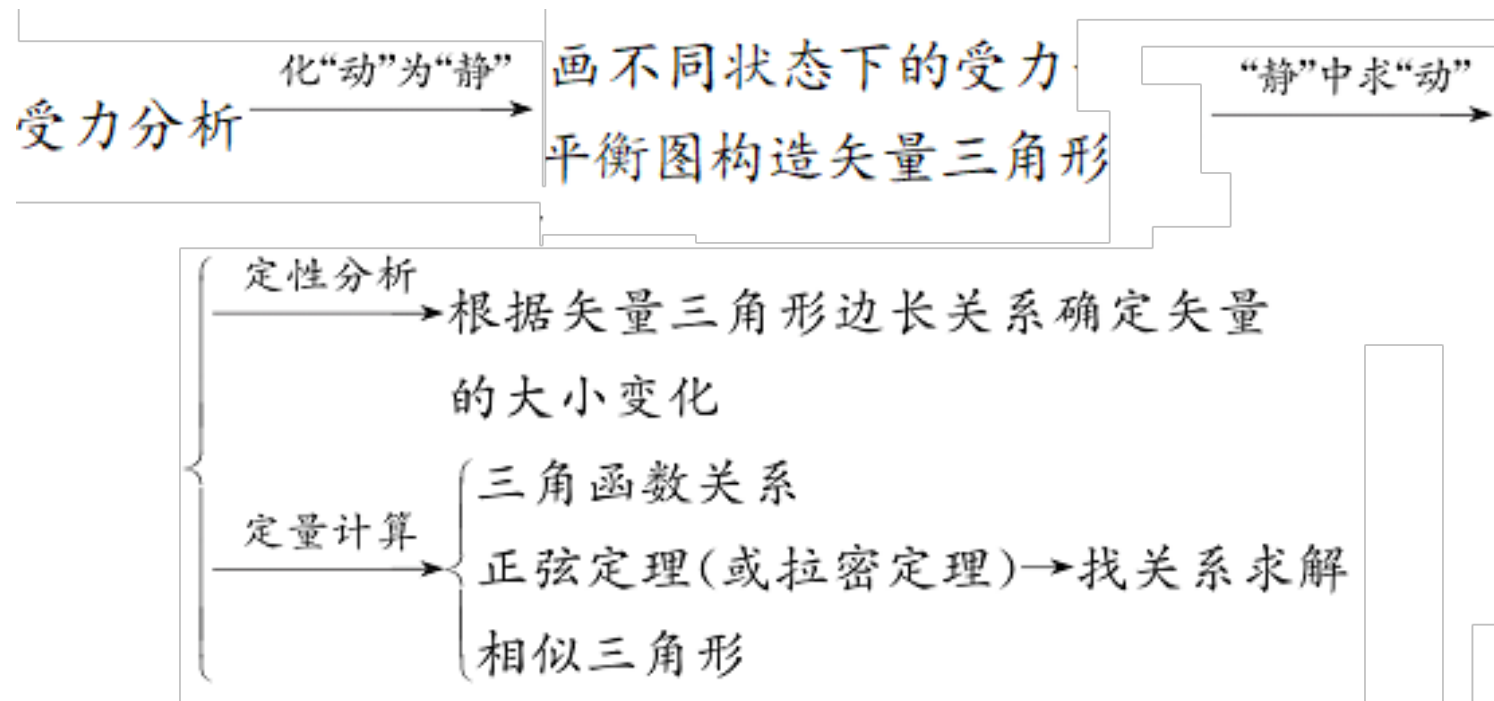
考点一 动态平衡问题

考点二 平衡中的临界与极值问题

考点一 动态平衡问题

1. 动态平衡是指物体的受力状态随时间发生变化，但在变化过程中任一状态均可视为平衡状态。

2. 解题程序





鯊
龍

方法1 解析法

1. 对研究对象进行受力分析，画出受力示意图。
2. 根据物体的平衡条件列式，得到因变量与自变量的关系表达式（通常要用到三角角函数）。
3. 根据自变量的变化确定因变量的变化。
4. 只有一个力与其它力既不平行也不垂直通常用解析法。

例 1 (2025·广东河源模拟) 如图甲所示, 为了保持餐具安全卫生, 学

校食堂将清洗干净后的碗碟等餐具侧立着竖直放置于餐具架上,

其侧视图如图乙所示, 其中固定光滑直杆 a 、 b 分别为两等高水

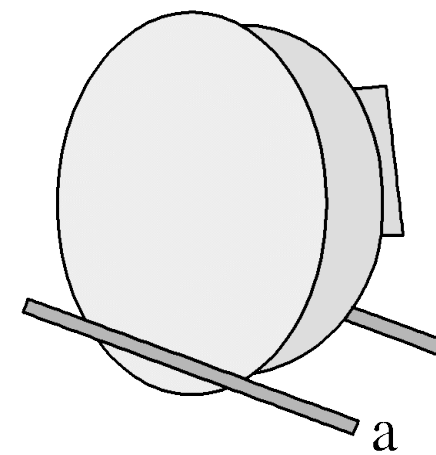
平金属杆, 图中碗外壁可看作半径为 R 的半球形。下列说法正确

的是 **C**
A. 若稍微增大 a 、 b 间距, 且碗仍保持竖直静止, 碗对 a 杆的压力不变

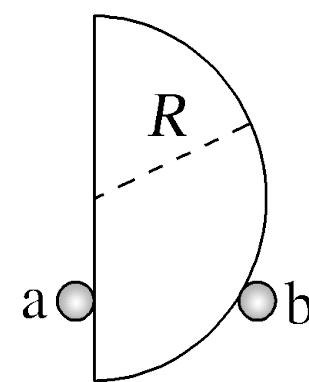
B. 若稍微减小 a 、 b 间距, 且碗仍保持竖直静止, 碗对 b 杆压力

C. 若将质量相同、半径 R 更大的碗竖直放置于 a 、 b 杆之间, 碗对 a 杆的压力变小

D. 若将质量相同、半径 R 更大的碗竖直放置于 a 、 b 杆之间, 碗对 b 杆的压力不变

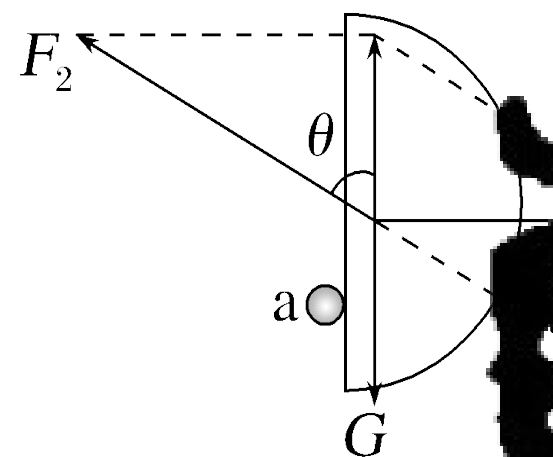


甲



乙

解析 由牛顿第三定律可知,碗对杆的压力与杆对碗的弹力始终等大反向。对碗受力分析如图,设杆对碗的弹力 F_2 与竖直方向的夹角为 θ ,则根据共点力的平衡条件可得 $F_1 = G \tan \theta$, $F_2 = \frac{G}{\cos \theta}$ 。若增大 a 、 b 间距, θ 增大,则 F_1 变大,故A错误;若减小 a 、 b 间距,则 θ 减小, F_2 减小,故B错误;若将质量相同、半径更大的碗竖直放置, F_1 减小, F_2 减小,故C正确, D错误。



正确答案：C



方法2 图解法

用图解法分析物体的动态平衡问题时，一般是物体只受三个力作用，且其中一个方向均不变（多为重力），另一个力的方向不变，第三个力大小、方向

例 2 (2026·广东佛山五校联考) 高层住宅向上提升重物时常采用如图所示装置，电机通过缆绳牵引重物沿竖直方向匀速上升。地面上的人通过移动位置使绳与竖直方向的夹角 β 保持不变，设缆绳与竖直方向的夹角为 α ，缆绳的拉力为 F_1 ，绳的拉力为 F_2 。则在重物沿竖直方向匀速上升的过程中，下列结论

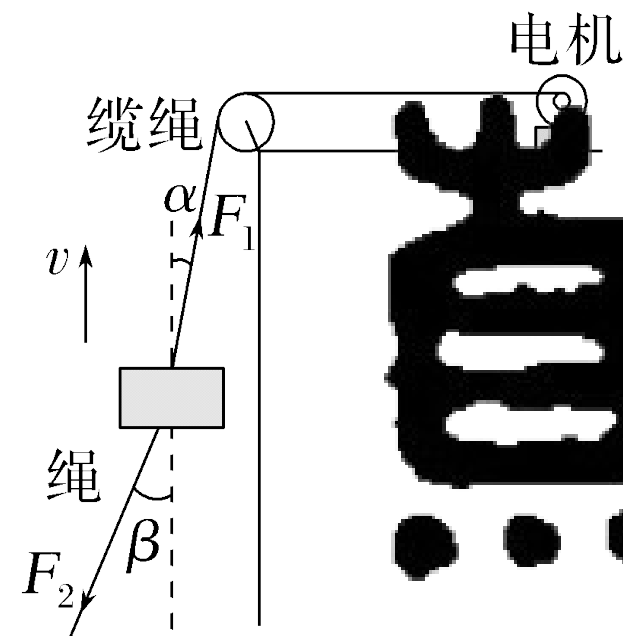
正确的(一定变大, F_2 可能不变

A. F_1 一定变大, F_2 可能不变

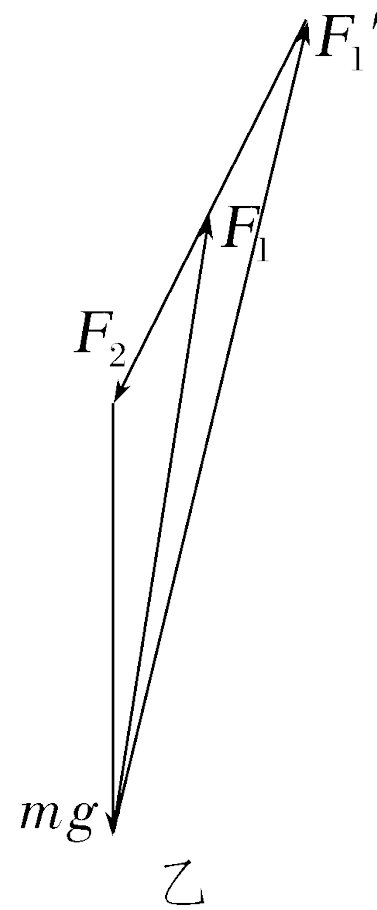
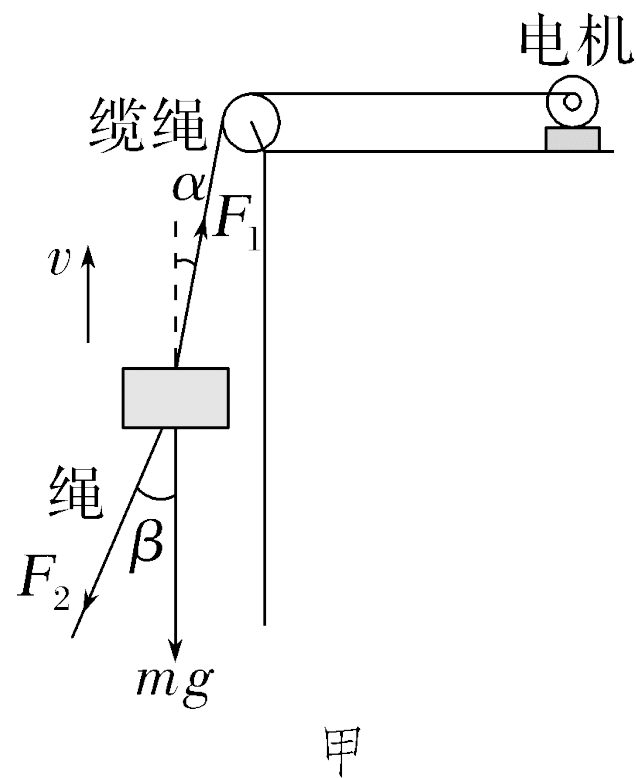
B. F_1 可能不变, F_2 一定变大

C. α 可能大于 β

D. α 总是小于 β



解析 对重物受力分析如图甲所示，
通过力的合成可知， F_1 反向延长线位
于 mg 夹角内，则缆绳与竖直方
向的夹角 α 小于夹角 β ，故 C 错误，D
正确；构建矢量三角形如图乙所示，
重物上升， α 增大，夹角 β 不变则 F_2
方向不变，所以由图乙可知缆绳的
拉力 F_1 和绳的拉力 F_2 都增大，故
A、P 错误。



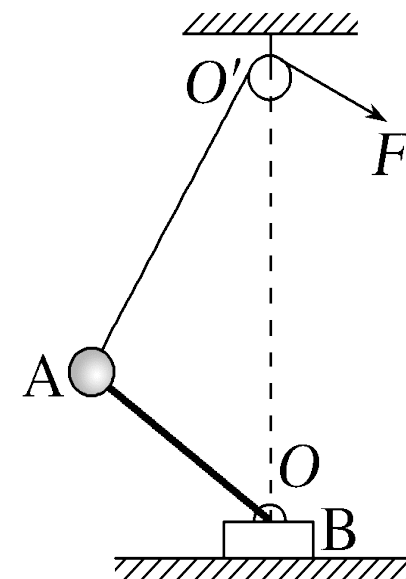


方法3 相似三角形法

物体受三个力平衡，其中一个力恒定（多为重力），另外两个力的方向同时变化，当所作“力的矢量三角形”与空间的某个“几何三角形”相似时，可利用相似三角形对应边成比例进行计算。

魚龍

例 3 (多选) (2026·广东珠海一中月考) 如图所示, 木板 B 放置在粗糙水平地面上, O 为光滑铰链。轻杆一端与铰链 O 固定连接, 另一端固定连接一质量为 m 的小球 A。现将轻绳一端拴在小球 A 上, 另一端通过光滑的定滑轮 O' 由力 F 牵引, 定滑轮位于 O 的正上方, 整个系统处于静止状态。现改变力 F 的大小, 使小球 A 和轻杆从图示位置缓慢运动到 O' 正下方, 木板始终保持静止, 则在整个过程中 ()



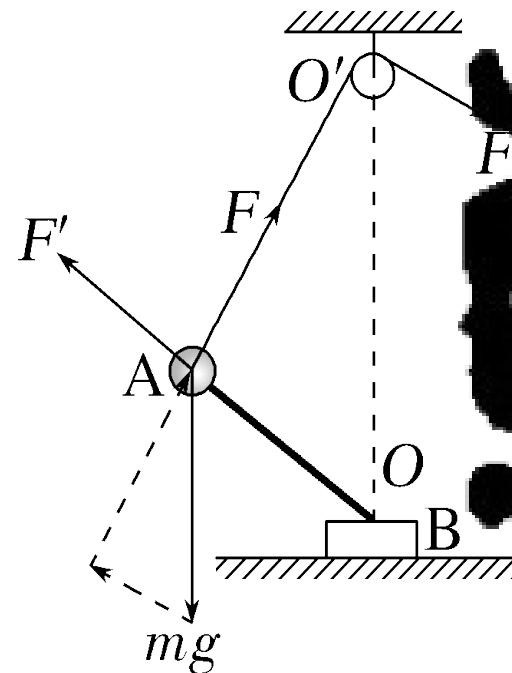
A. 拉力 F 逐渐增大

B. 杆对小球的作用力大小不变

C. 地面对木板的支持力逐渐减小

D. 地面对木板的摩擦力逐渐减小

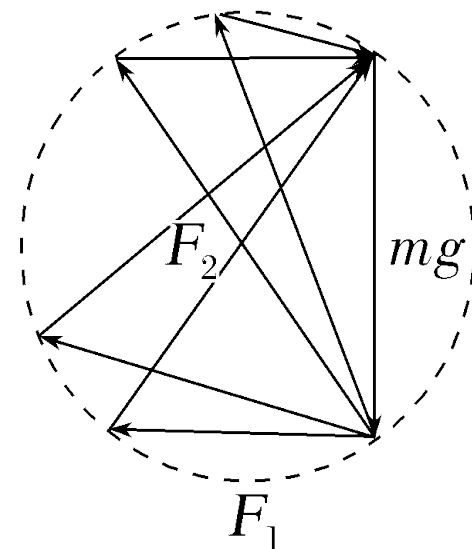
解析 对小球A进行受力分析，三力构成矢量三角形，如图所示，根据三角形相似可得 $\frac{mg}{F'} = \frac{F}{F}$ ，轻杆形，如图所示，根据三角形相似可得 $\frac{mg}{F'} = \frac{F}{F}$ ，轻杆缓慢运动过程中O'A越来越小，则 F' 逐渐减小，杆缓慢运动过程中O'A越来越小，则 F' 逐渐减小，由于OA长度不变，杆对小球的作用力 F' 大小不变，故A错误，B正确；令轻杆与水平方向夹角为 θ ，对木板B受力分析，有 $F_N = Mg + F \sin \theta$ ， $f = F \cos \theta$ ，根据上述，轻杆弹力大小 F' 不变， θ 增大，则 F_N 增大， f 减小，即地面对木板的支持力逐渐变大，地面对木板的摩擦力逐渐减小，故C错误，D正确。



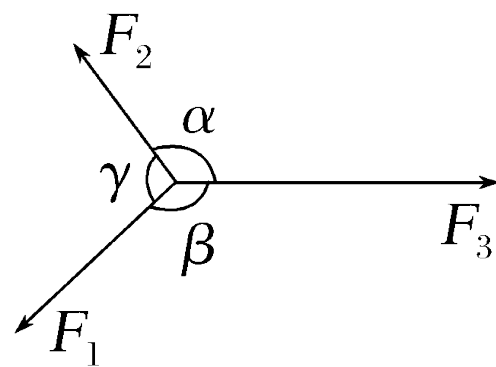
正确答案：D

方法4 矢量圆法（正弦定理法）

1. **矢量圆法**：如图所示，物体受三个共点力作用而平衡，其
中一个力大小恒定，另外两力方向一直变化，但两力的夹角不变
时，作出不同状态的矢量三角形，利用两力夹角不变，可以
作出动态圆（也可以由正弦定理列式求解），恒力为圆的一
条弦，根据不同位置判断各力的大小变化。

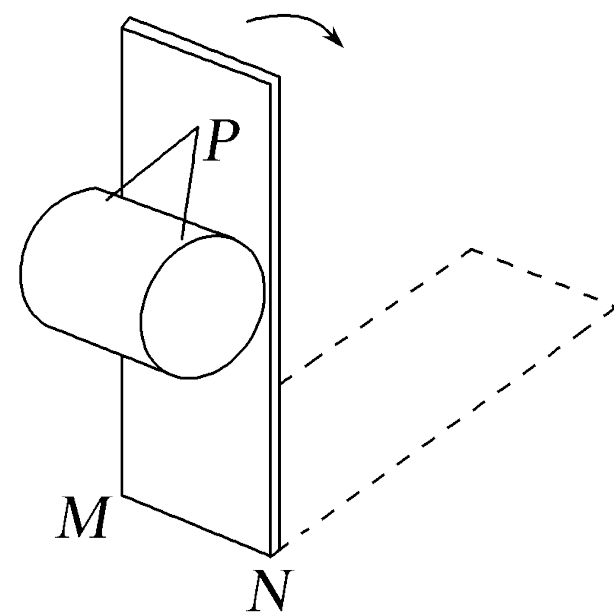


2. **正弦定理法**: 如图所示, 物体受三个共点力作用而处于平衡状态, 则三个力中任意一个力的大小与另外两个力的夹角的正弦成正比, 即 $\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F_3}{\sin \gamma}$.



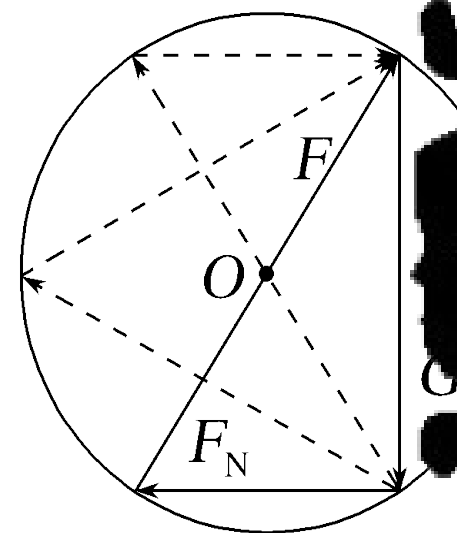
黄浦

例 4 如图所示，用两根等长的细绳将一匀质圆柱体悬挂在木板上的 P 点，将木板以底边 MN 为轴向后方缓慢转动，始终保持木板水平，绳与木板之间的夹角保持不变，忽略圆柱体与木板之间的摩擦，在转动过程中（ ）



- A. 圆柱体对木板的压力逐渐增大
- B. 圆柱体对木板的压力先增大后减小
- C. 两根细绳上的拉力均先增大后减小
- D. 两根细绳对圆柱体拉力的合力保持不变

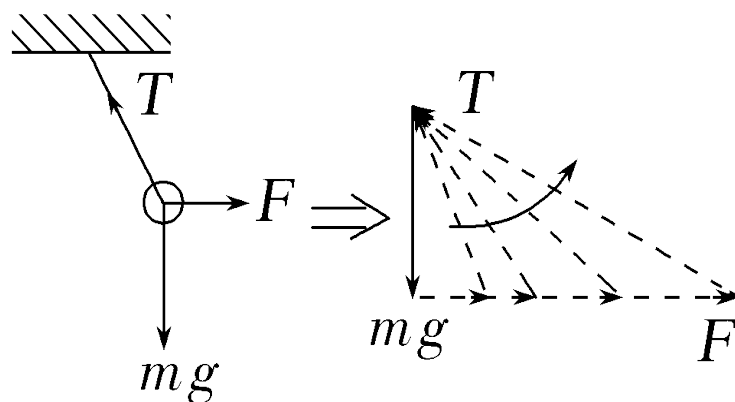
解析 设两根绳对圆柱体的拉力的合力为 F , 每根绳的拉力为 F_T , 两绳之间的夹角为 2θ , 则 $2F_T \cos \theta = F$, 可得 $F_T = \frac{F}{2 \cos \theta}$, 画出矢量三角形, 如图所示, G 为圆柱体重力, F_N 为所受支持力。因为 F 和 F_N 的夹角保持不变, 矢量三角形处在以斜边中点 (初始时 F 中点) 为圆心的外接圆中, 在将木板以底边 MN 为轴向后方缓慢转动直至水平过程中, 可判断出 F_N 先增大后减小, F 逐渐减小, 则 F_T 不断减小, 故 B 正确, A 错误。 D 错误。



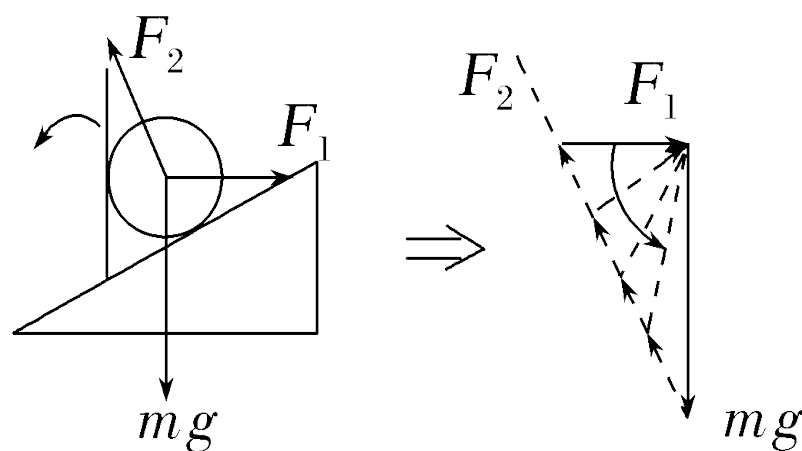
正确答案

方法总结 动态平衡模型分析方法

矢量三角形法：
 一个力大小方向固定，另一个力方向固定，第三个力大小方向均不固定

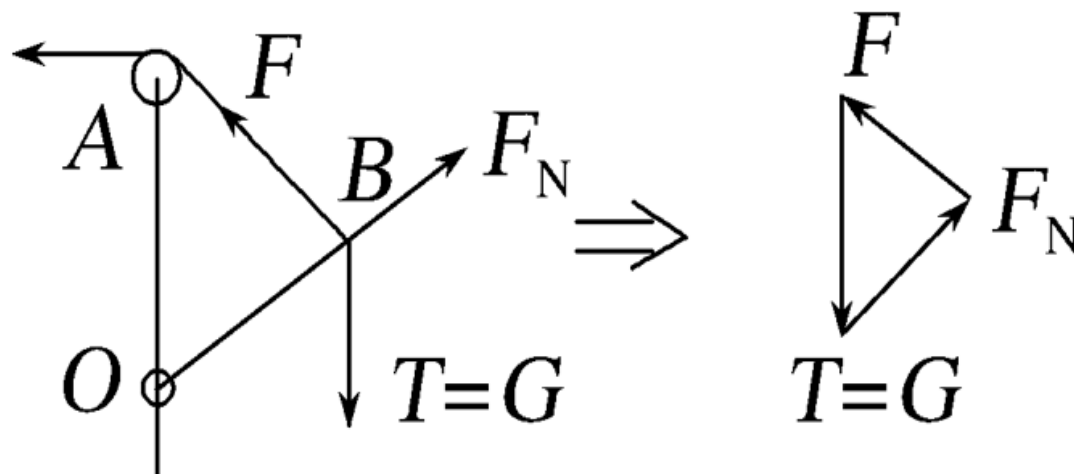


水平拉力 F 逐渐增大，绳的拉力也逐渐增大



挡板对球的作用力 F_1 先减小后增大，斜面对球的支持力 F_2 逐渐减小

相似三角形法：
矢量三角形与
几何三角形相
似

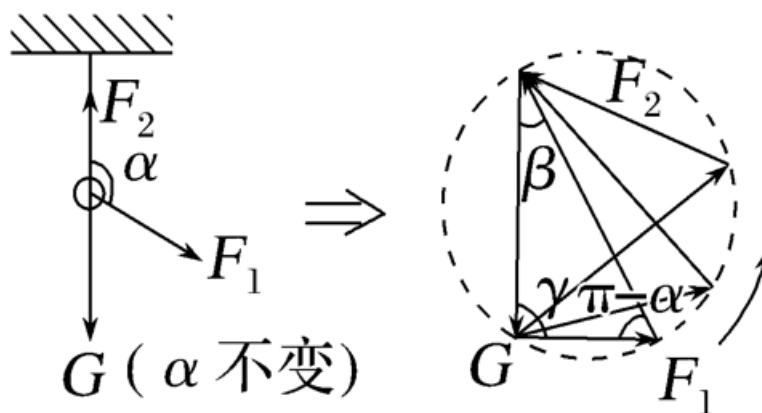


$$\frac{OA}{G} = \frac{OB}{F_N} = \frac{AB}{F}$$

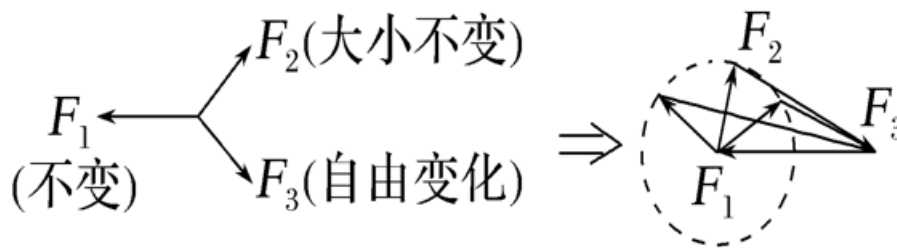
辅助圆法:

(1) 一个力大小、方向固定, 另两个力间的夹角固定。

(2) (学有余力同学参考) 一个力大小、方向固定, 另一个力大小固定, 第三个力大小、方向均不固定



正弦定理 $\frac{G}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{F_1}{\sin \beta} = \frac{F_2}{\sin \gamma}$





考点二 平衡中的临界与极值问题

1. 临界、极值问题特征

(1) 临界问题：当某物理量变化时，会引起其他几个物理量的变化，从而使物体所处的平衡状态“恰好出现”或“恰好不出现”，在问题的描述中常用“刚好”“恰好”“能”“恰好”等语言叙述。

常见的临界状态有：

- ① 由静止到运动，摩擦力达到最大静摩擦力，注意静摩擦力方向可以发生变化。
- ② 绳子恰好绷紧，拉力 $F=0$ 。
- ③ 刚好离开接触面，支持力 $F_N=0$ 。

(2) 极值问题：平衡物体的极值，一般指在力的变化过程中的最大值和最小值。

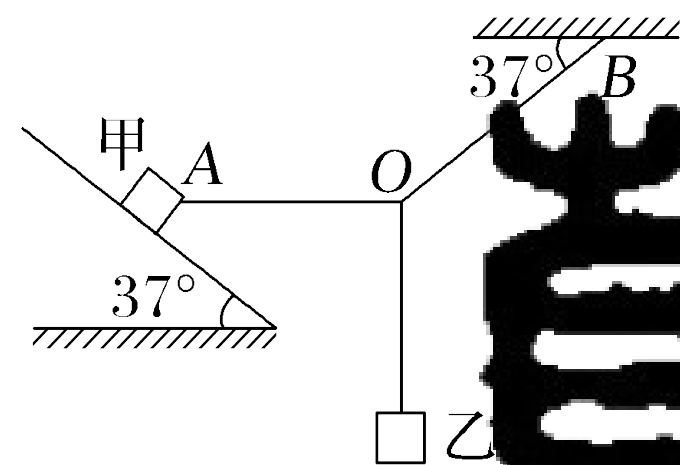
临界



2. 解决临界和极值问题的三种方法

临界问题	正确进行受力和变化过程分析，找到平衡的临界点和极值点；临界条件必须在变化中寻找，不能在一个状态上研究临界问题，要把某个物理量推向极大或极小
数学方法	通过对问题的分析，根据平衡条件列出物理量之间的函数关系（画出函数图像），用数学方法求极值（如求二次函数极值、公式极值、三角函数极值）
矢量分析	根据平衡条件，作出力的矢量图，通过对物理过程的分析，利用平行四边形定则进行动态分析，确定最大值和最小值

例 5 如图所示, 质量 $M=4\text{ kg}$ 物块甲置于倾角为 37° 的斜面上, 物块甲与斜面间的动摩擦因数 $\mu=0.5$, 物块与斜面间的最大静摩擦力大小等于滑动摩擦力大小。质量为 $m=3\text{ kg}$ 的物块乙通过三段轻绳悬挂, 三段轻绳的结点为 O , 水平轻绳 OA 与物块甲连接于 A 点, 轻绳 OB 与水平方向夹角也为 37° 。对物块甲施加沿斜面向上的力 F (图中未画出) 使甲、乙两物块均静止。已知 $\sin 37^\circ=0.6, \cos 37^\circ=0.8$, 重力加速度



$g=10\text{ m/s}^2$ 求: (1) 轻绳 OA 的弹力 T_{OA} 大小和轻绳 OB 的弹力 T_{OB} 大小

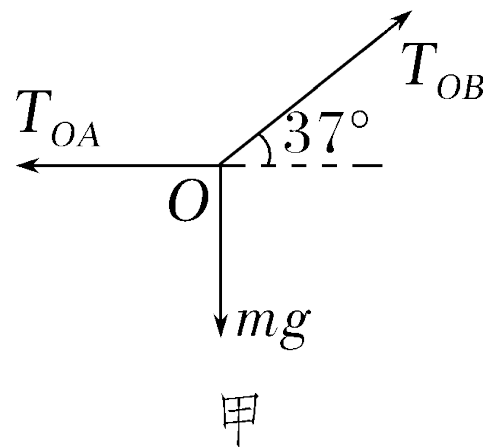
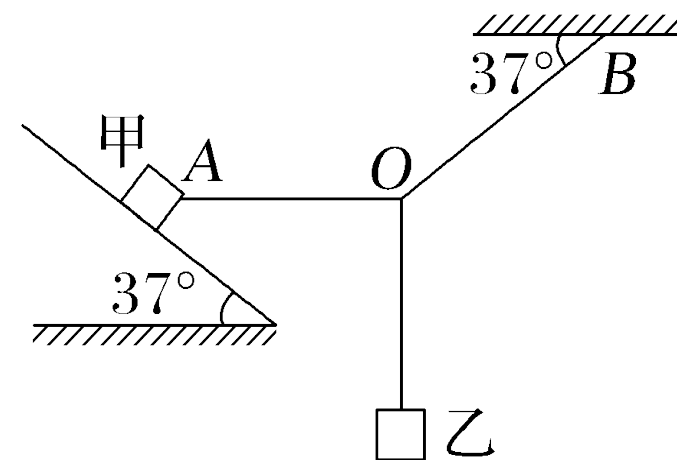
(2) 斜面对甲的弹力 F_N 大小;

(3) 力 F 大小的取值范围。

解析 (1) 对结点 O , 如图甲所示, 由平衡条件得

$$T_{OB} \cos 37^\circ = T_{OA}, T_{OB} \sin 37^\circ = mg$$

解得 $T_{OA} = 40 \text{ N}, T_{OB} = 50 \text{ N}$ 。

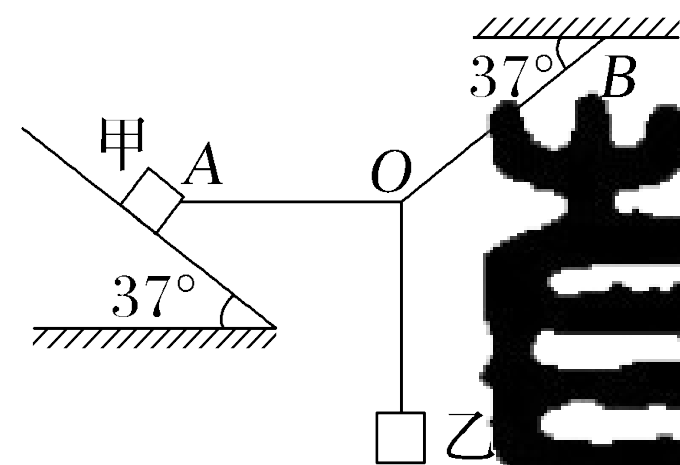
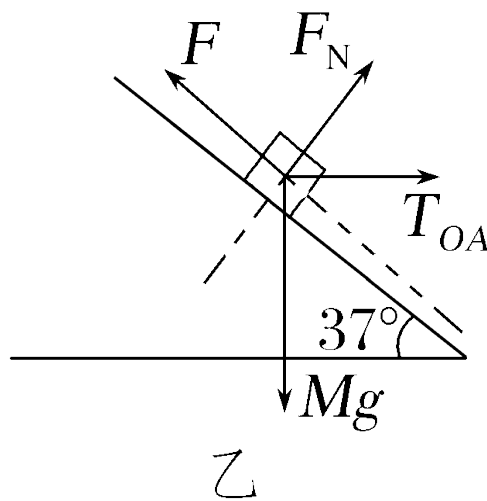


答案 40 N 50 N

解析 (2) 对物块甲进行受力分析, 如图乙所示, 由平衡条件得在垂直斜面方向

$$F_N = Mg \cos 37^\circ - T_{OA} \sin 37^\circ$$

$$= 8 \text{ N}。$$



答案 8 N

解析 (3) 甲受到的最大静摩擦力为

$$f_m = 4 \text{ N}$$

当拉力 F 较小, 且沿斜面向上的摩擦力达到最大静摩擦力时, 由平衡条件可得

$$F_1 = Mgs \sin 37^\circ + T_{OA} \cos 37^\circ$$

代入数值解得 $F_1 = 52 \text{ N}$

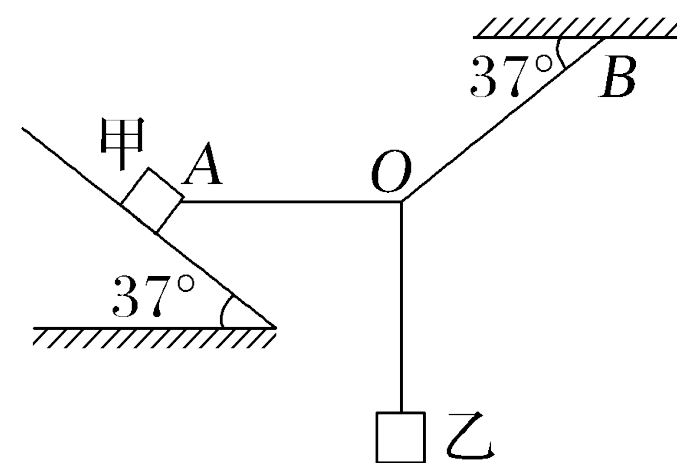
当拉力 F 较大, 且沿斜面向下的摩擦力达到最大静摩擦力时, 由平衡条件可得

$$F_2 = Mgs \sin 37^\circ + T_{OA} \cos 37^\circ + f_m$$

$$F_2 = 60 \text{ N}$$

故拉力 F 大小的取值范围为 $52 \text{ N} \leq F \leq 60 \text{ N}$ 。

答案 $52 \text{ N} \leq F \leq 60 \text{ N}$



例6 (2025·河北石家庄模拟) 我国明代综合性科技巨著《天工开物》“五金”篇中提到为了将矿石从矿坑中运出,工人们会搭建简易的斜面通道,这是古代劳动人民智慧的结晶。如图所示,若斜面的倾角为 15° , 方形矿石与斜面间的动摩擦因数为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 重力加速度为 g 。现用轻绳拉着质量为 m 的矿石沿斜面匀速上滑,所需的拉力最小值为()

所需的拉力最小值为 $(\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4})$ (**A**)

A. mg

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}mg$

C. mg

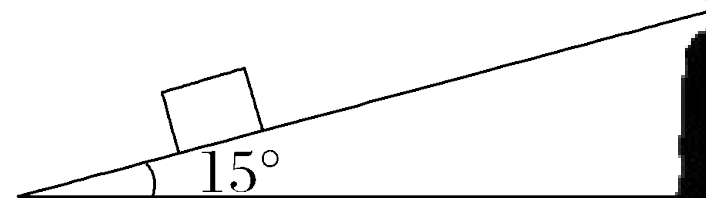
C. $\frac{\sqrt{6}}{3}mg$

B. mg

B. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}mg$

D. mg

D. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}mg$



解析 方法一 三角函数法

设拉力与斜面的夹角为 θ 时，拉力有最小值，对矿石进行受力分析，如图所示，根据共点力的平衡条件得

$$F \sin \theta - mg \sin 15^\circ - f = 0$$

$$F \cos \theta - mg \cos 15^\circ - F_N = 0$$

联立整理得 $F \cos \theta = \mu(mg \cos 15^\circ - F \sin \theta) + mg \sin 15^\circ$

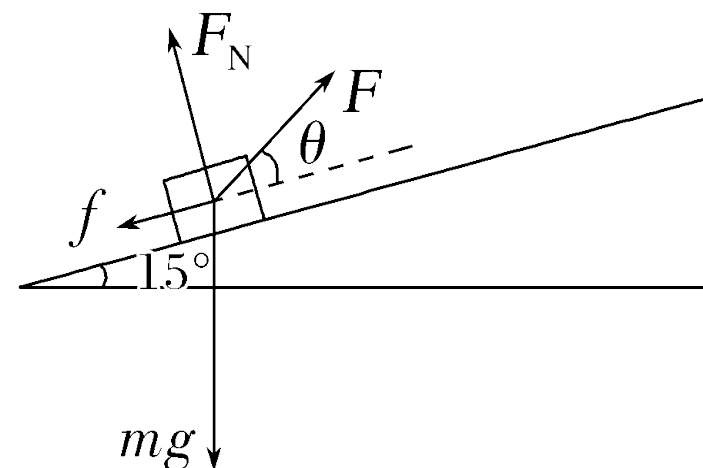
$$则 F = \frac{mg \sin 15^\circ + \mu mg \cos 15^\circ}{\sin \theta + \mu \cos \theta}$$

$$即 F = \frac{mg(\sin 15^\circ + \mu \cos 15^\circ)}{\sin(\theta + \varphi)} \quad (其中 \tan \varphi = \frac{1}{\mu})$$

$$\sqrt{3}, 即 \varphi = 60^\circ$$

$$当 \sin(\theta + 60^\circ) = 1, 即 \theta = 30^\circ$$

$$F_{min} = \frac{mg \sin 15^\circ + \mu mg \cos 15^\circ}{\sqrt{1 + \mu^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} mg, 故 A 正确。$$

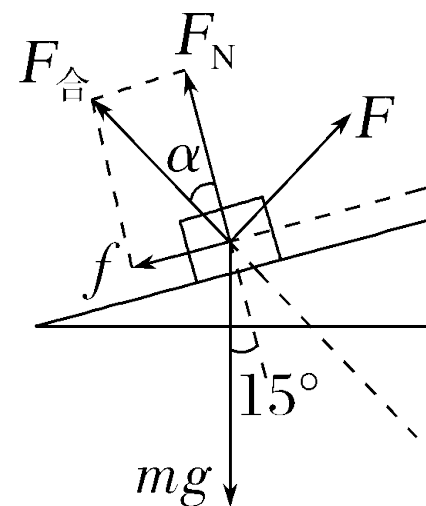


方法二（学有余力同学参考） “摩擦角”法

对矿石受力分析如图所示，将 F_N 与 f 合成，设其合力方向与 F_N 成 α 角， α 即为摩擦角，

易知 $\tan \alpha = \frac{f}{F_N} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ，得 $\alpha = 30^\circ$ ，则拉力 F 与 $F_{\text{合}}$ 垂直时拉力 F 最小，最小值为 $F_{\min} = mg \sin(\alpha + 15^\circ) = mg$ ，故 A 正确。

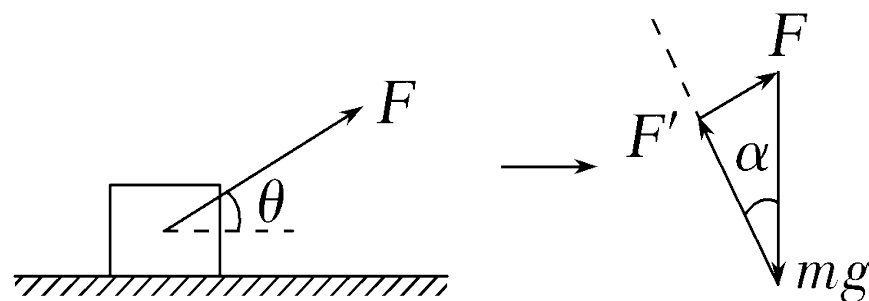
A 正确。



正确答案

总结提升

在力的方向发生变化的平衡问题中求力的极小值时，一般利用三角函数求极值，也可用“摩擦角”将四力平衡转化为三力平衡，从而求拉力的最小值。例如：物体在拉力 F 作用下做匀速直线运动，改变 θ 大小，求拉力的最小值时，可以用支持力与摩擦力的合力 F' 代替支持力与摩擦力， F_N 与 f 的合力 F' 方向一定，即“摩擦角 α ”满足 $\tan \alpha = \mu$ ，拉力 F 与合力 F' 垂直时力 F 有最小值，摩擦角 α 满足 $\tan \alpha = \frac{f}{F_N} = \mu$ ，拉力 F 与合力 F' 垂直时力 F 有最小值，则 $F \sin \alpha = mg \sin \alpha$ ，此时 $\theta = \alpha$ 。





黄埔教研
HUANGPUJIAOYAN

谢谢

