

第 5 节 圆周运动的临界问题

广州市执信中学 杨正

【目标要求】



黄埔教研
HUANGPUJIAOYAN

1. 会分析水平面内、竖直面内及倾斜面内物体做圆周运动的向心力来源及动力学问题。
2. 掌握分析判断临界问题的方法。

圆周运动



0
1

水平面内圆周运动的临界问题

0
2

竖直面内圆周运动的临界问题

0
3

斜面上圆周运动的临界问题

主题一、水平面内圆周运动的临界问题

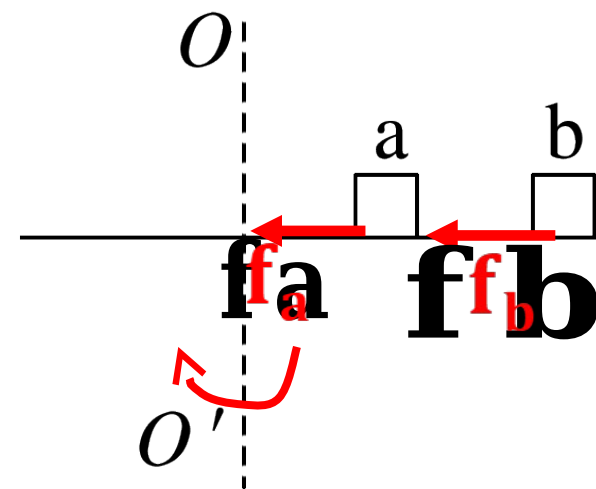


一、水平面内圆周运动的临界问题

思考 1: 摩擦因数不同的物质做成的物块 a、b, 谁先滑离?

$$\mu mg = m\omega_0^2 r$$

$$\omega_0 = \sqrt{\mu g / r}$$



结论 1: μ/r 越大, 则滑动的临界角速度越大, 更难滑动, 与物体质量无关。

解题关键: 物体间恰好发生相对滑动的临界条件是物体间恰好达到最大静摩擦力。



一、水平面内圆周运动的临界问题

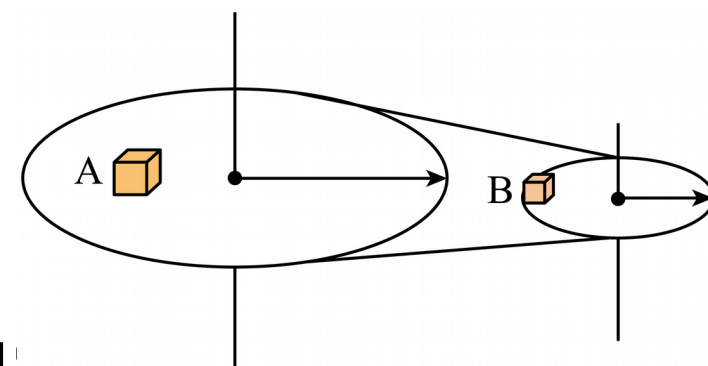
【例 1】（多选）如图，主动轮大圆盘与从动轮小圆盘通过皮带（不打滑）连接，大圆盘与小圆盘的半径之比为 $2:1$ ，材料相同的可以视为质点的两物体质量之比 $m_A:m_B=4:1$ ，两个物体距离转动轴的距离相等。现在让圆盘匀速转动起来，下列选项正确的是（**AD**）

A 物体 A 与物体 B 相对圆盘滑动之前的角速度之比为 $1:2$

B 物体 A 与物体 B 相对圆盘滑动之前的摩擦力之比为 $1:4$

C 物体 A 与物体 B 相对圆盘滑动之前的向心加速度之比为 $4:1$

D 如果增加主动轮的转速，则 B 物体先相对圆盘滑动



	m	μ	r	ω	f	a_n	$\omega_{\text{临界}}$
A							
B							



一、水平面内圆周运动的临界问题

思考 2: 圆盘转速从零开始缓慢增加, 求同种物质做成的 a、b 两物体滑离圆盘的角速度?

$$a \quad f_a = m_a \omega^2 r_a$$

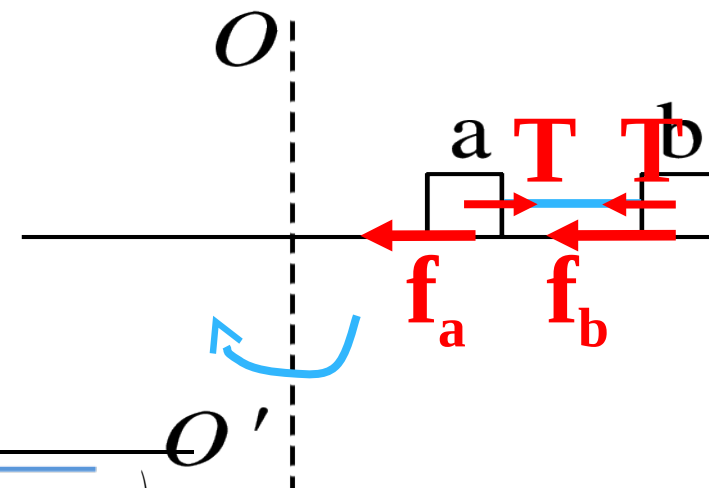
$$b \quad f_b = m_b \omega^2 r_b$$

$$f_a - T = m_a \omega^2 r_a$$

$$\mu m_b g + T = m_b \omega^2 r_b$$

∴ 谁先达到最大静摩擦力谁先滑离

当达到最大静摩擦力时, a、b 开始向外滑离



$$a \quad \mu m_a g - T = m_a \omega_0^2 r_a$$

$$b \quad \mu m_b g + T = m_b \omega_0^2 r_b$$

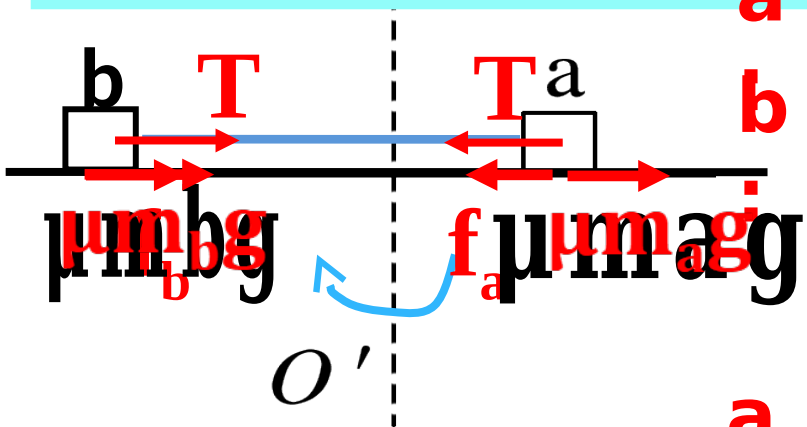
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu g (m_a + m_b)}{m_a r_a + m_b r_b}}$$

$$\mu m_a g + \mu m_b g = m_a \omega_0^2 r_a + m_b \omega_0^2 r_b$$

一、水平面内圆周运动的临界问题



思考 3: 圆盘转速从零开始缓慢增加, 同种物质做成的 a、b 两物体如何滑离?



a $f_a = m_a \omega^2 r_a$

b $f_b = m_b \omega^2 r_b$

先后达到最大

a $f_a + T = m_a \omega^2 r_a$

b $\mu m_b g + T = m_b \omega^2 r_b$

$f_a = m_a \omega^2 r_a - (\mu m_b g + T)$

$f_a = \omega^2 (m_a r_a - m_b r_b) + \mu m_b g$

a $T - \mu m_a g = m_a \omega_0^2 r_a$

b $\mu m_b g + T = m_b \omega_0^2 r_b$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu g (m_a + m_b)}{m_b r_b - m_a r_a}}$ 多数情况

若

① $m_a r_a > m_b r_b$

② $m_a r_a < m_b r_b$

③ $m_a r_a = m_b r_b$

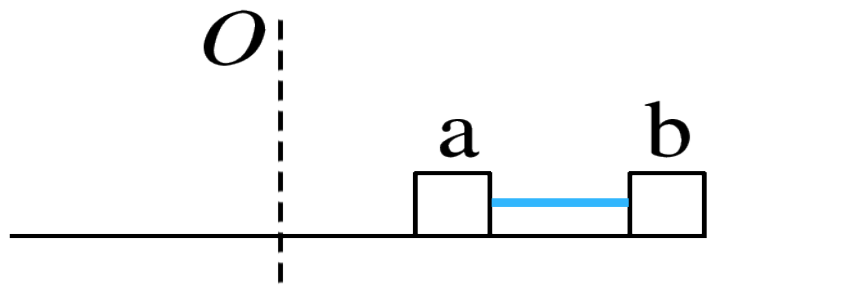
f_a 增大, 达到最大后, f_b 减小并反向达到最大 a 把 b 拉跑

$f_b = \mu m_b g$ 不变, f_a 减小并反向达到最大, b 把 a 拉跑

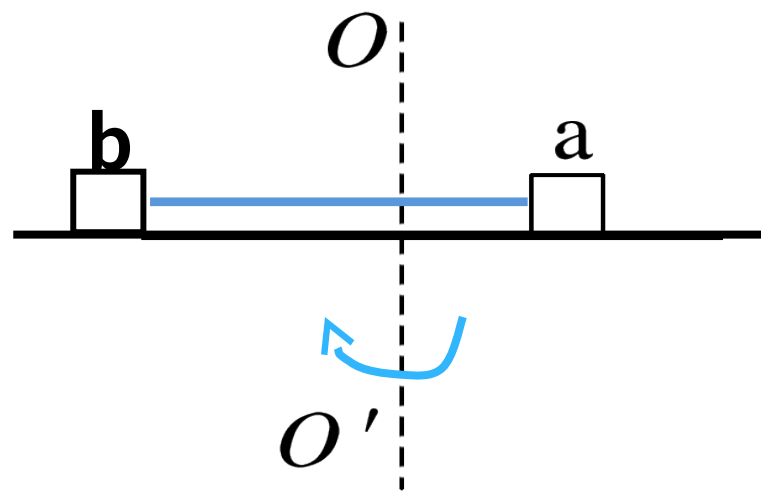
$f_a = f_b = \mu m_b g$ 都不变, 绳子拉力一直增大直到断裂

一、水平面内圆周运动的临界问题

结论 2 : ①滑离的临界角速度跟两物体质量 m 和半径 r 都有关:
 ② mr 乘积大的拉离 mr 乘积小的, 滑离时, 二者均达到最大静摩擦力



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu g (m_a + m_b)}{m_a r_a + m_b r_b}}$$



b 拉 a

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu g (m_a + m_b)}{m_b r_b - m_a r_a}}$$

a 拉 b

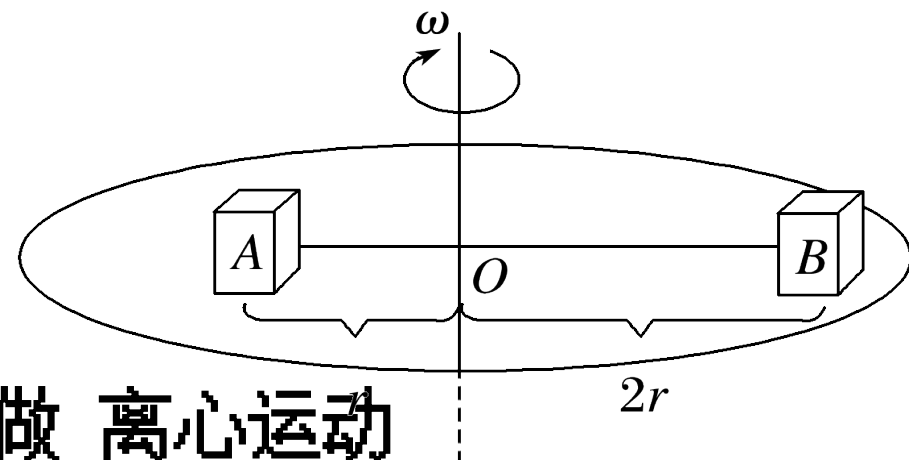
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu g (m_a + m_b)}{m_a r_a - m_b r_b}}$$



一、水平面内圆周运动的临界问题

【例2】 (多选) 如图新图所示在匀速转动的水平圆盘上沿半径方向放着两物块A和B, A和B分居圆心两侧, 它们与圆心的距离分别为 $R_A = 2r$ 与 $R_B = r$ 与盘间的动摩擦因数相同, 圆盘转速缓慢增大两物块刚好要发生滑动时, 刚好要最大静摩擦力等于滑动摩擦力, 则滑动摩擦正确的是列 **A** 正确的是 ()

此时绳子张力为 $3\mu mg$
 此时A所受摩擦力方向沿半径指向圆心
 此时圆盘的角速度为 $\sqrt{2\mu g}$
 此时圆盘的角速度为 $\sqrt{2\mu g}$
 此时烧断绳子, A 仍相对盘静止, B 将做离心运动
 此时烧断绳子, A 仍相对盘静止, B 将做离心运动



主题二、竖直面内圆周运动的临界问题



二、竖直面内圆周运动的临界问题

思考 1. 是匀速圆周运动吗？合力指向圆心吗？

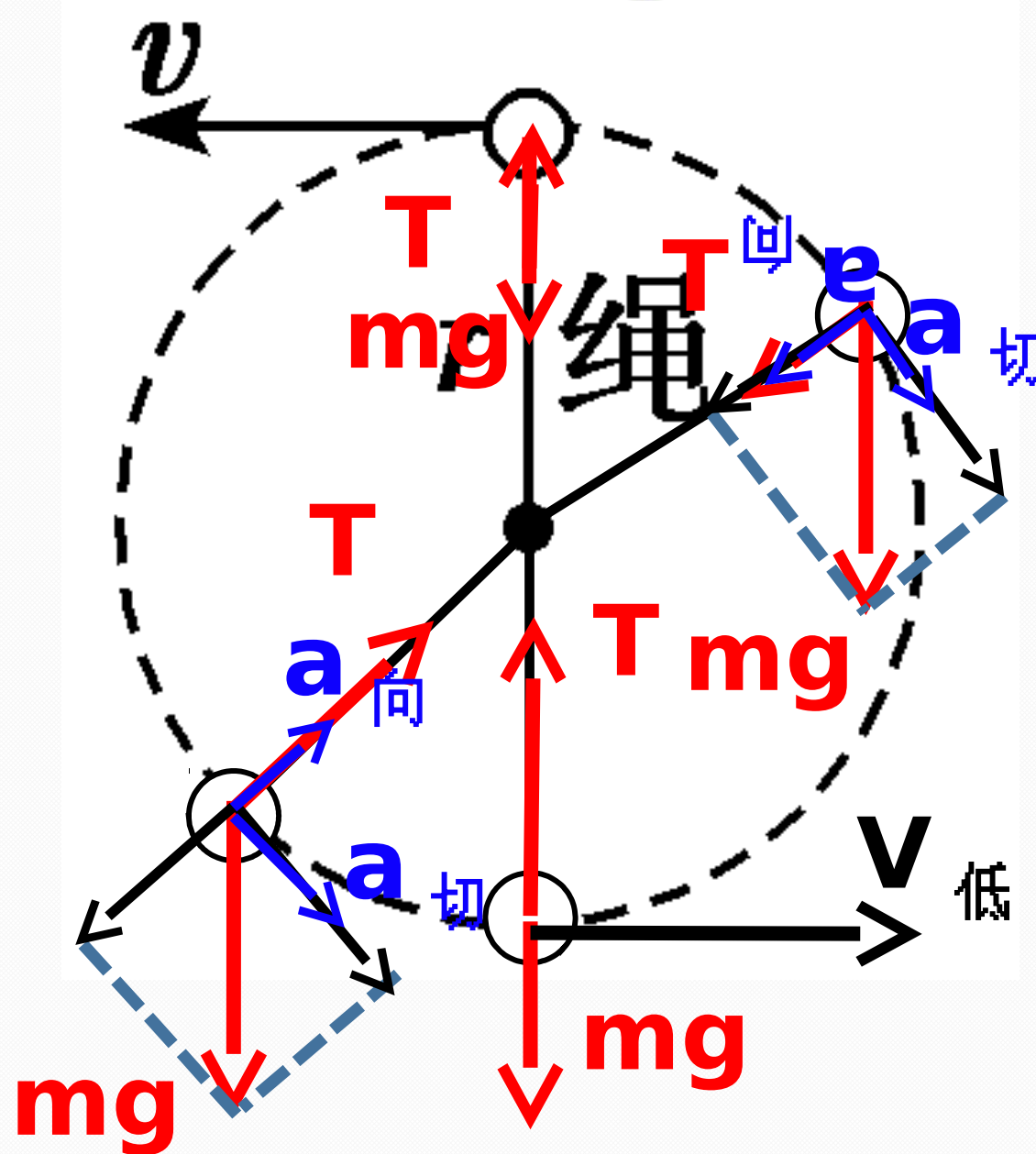
一般为变速圆周运动，故除最高点和最低点（或等效最高点和等效最低点）合外力指向圆心，其他位置合外力不指向圆心

思考 2. 向心力由重力和绳子拉力的合力提供吗？拉力最大的位置在哪？

向心力由重力和绳子拉力的合力沿绳方向分力提供；在最低点拉力最大

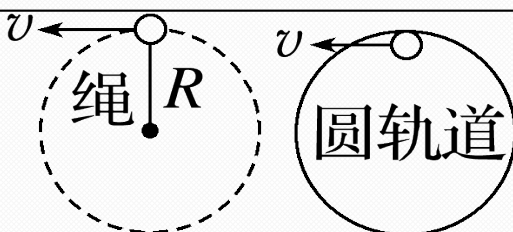
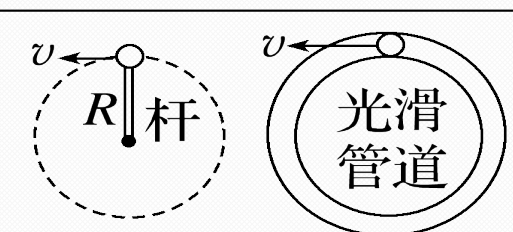
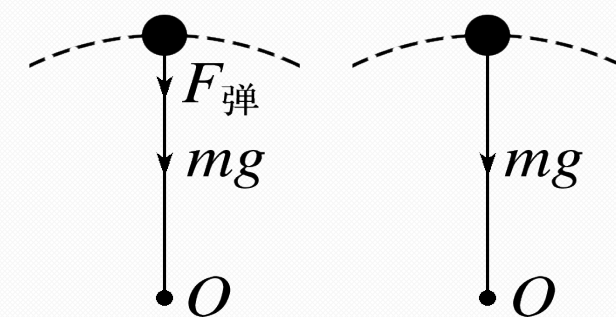
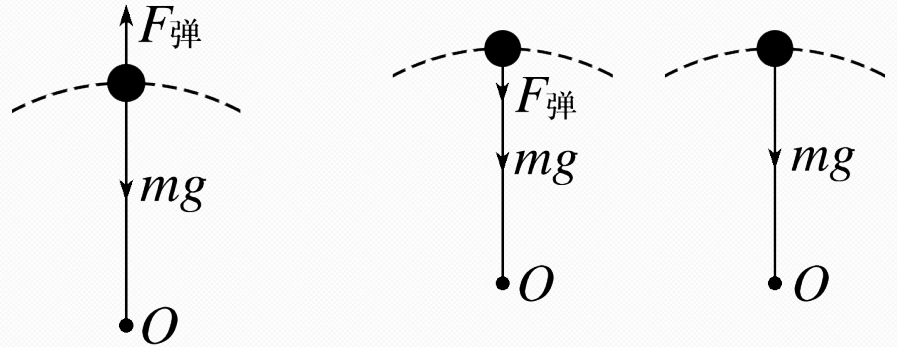
思考 3. 如何求速度或动能？

利用动能定理或能量守恒定律求解



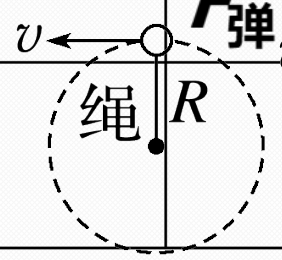
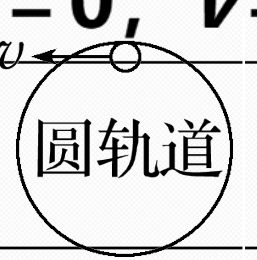
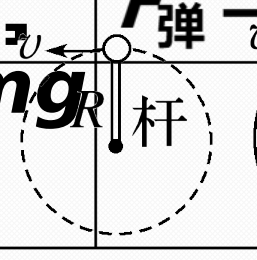
二、竖直面内圆周运动的临界问题

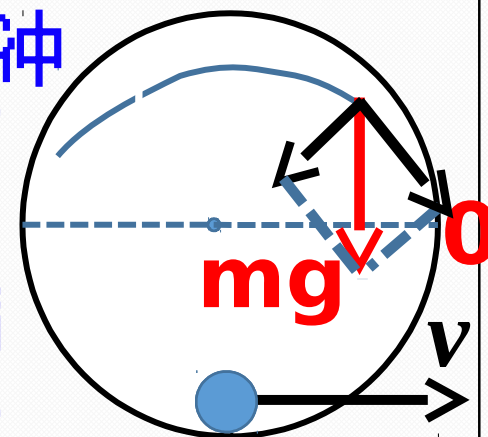
4. 竖直面内圆周运动的两类模型

	轻绳模型	轻杆模型
常见类型	 小球最高点 没有支撑	 小球最高点 有支撑
最高点受力特征	除重力外，物体受到的弹力方向： 向下或等于零	除重力外，物体受到的弹力方向： 向下、等于零或向上
最高点受力示意图		
动力学方程	$mg \pm F_{\text{弹}} = m \frac{v^2}{R}$	$mg \pm F_{\text{弹}} = m \frac{v^2}{R}$

二、竖直面内圆周运动的临界问题

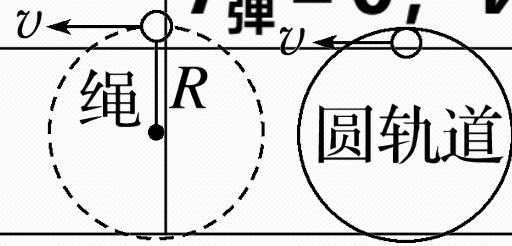
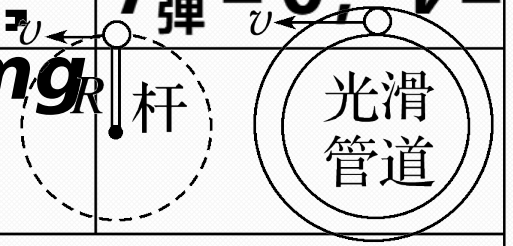
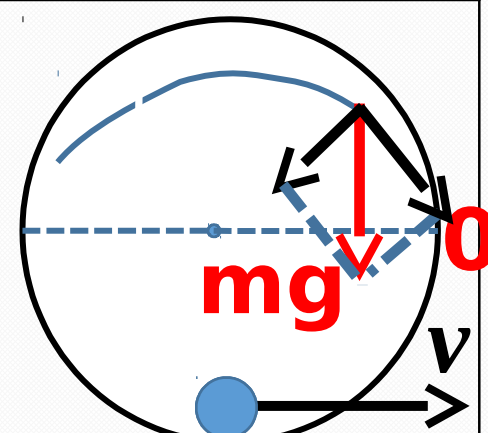
4. 竖直面内圆周运动的两类模型

	轻绳模型		轻杆模型	
临界特征	$F_{\text{弹}} = 0$ $mg = \frac{mv^2}{R}$ 即 $v_{\min} = \sqrt{gR}$	 	恰好过最高点， $v = 0$ ， $F_{\text{弹}} = mg$ 恰好无弹力， $F_{\text{弹}} = 0$ ， $v = \sqrt{gR}$	 
过最高点的条件	在最高点的 $v \geq \sqrt{gR}$	$-mg \cdot 2R = \frac{1}{2}mv_{\text{高}}^2 - \frac{1}{2}mv_{\text{低}}^2$ $v_{\text{低}} \geq \sqrt{5gr}$	$v \geq 0$	
绳、单轨的脱轨临界条件	① $\sqrt{2gr} < v_{\text{低}} < \sqrt{5gr}$ 上半圆脱轨 ② $0 < v_{\text{低}} \leq \sqrt{2gr}$ 最高到圆心等高处的往复运动 $R - mgR = 0 - \frac{1}{2}mv_{\text{低}}^2 \quad v_{\text{低}} = \sqrt{2gr}$		思考：要想冲到圆心等高处，小球的初速度要满足什么条件	



二、竖直面内圆周运动的临界问题

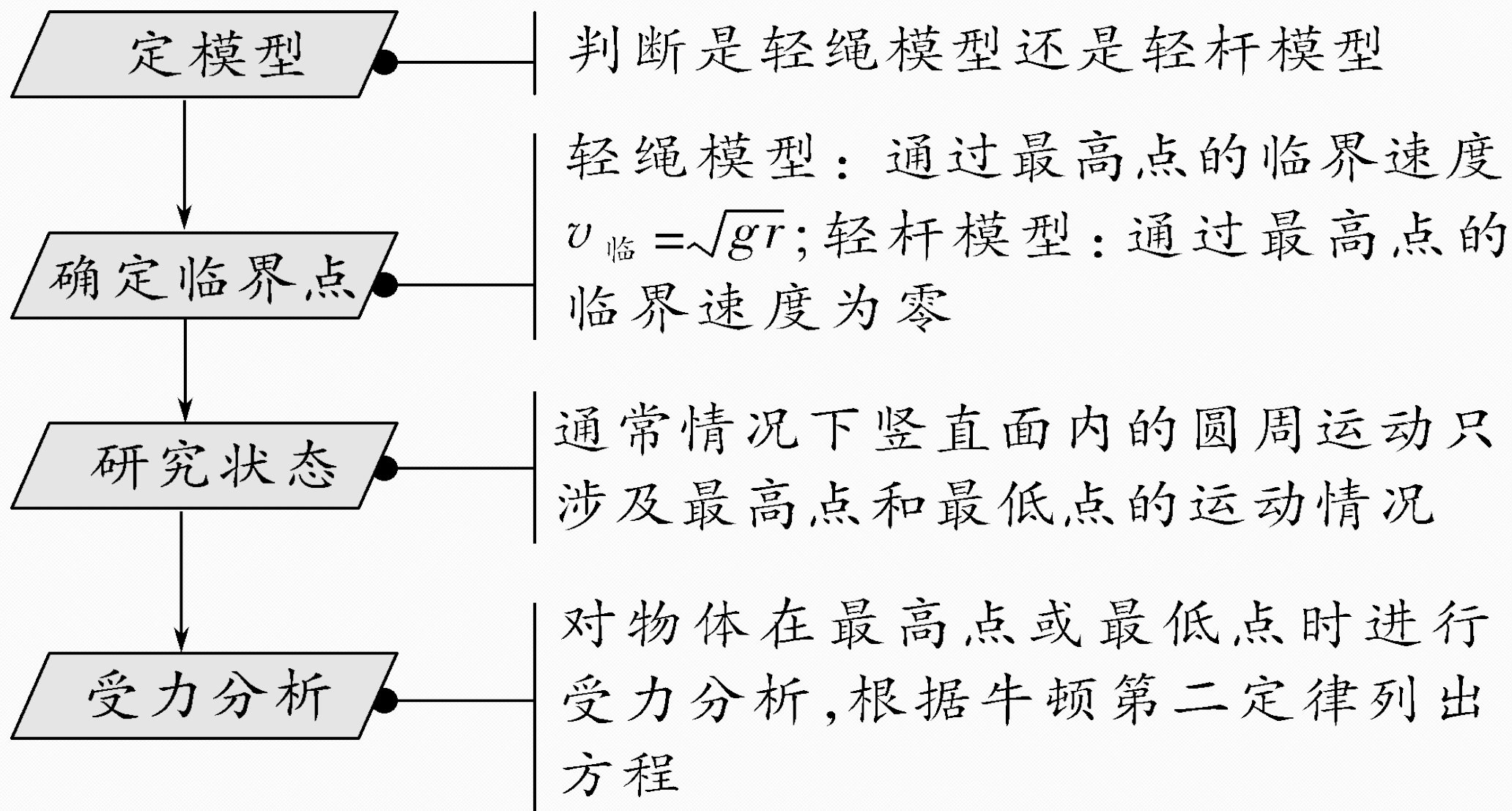
4. 竖直面内圆周运动的两类模型

	轻绳模型		轻杆模型	
临界特征	$F_{\text{弹}} = 0$ $mg = \frac{mv^2}{R}$ 即 $v_{\min} = \sqrt{gR}$		$F_{\text{弹}} = 0, v = \sqrt{gR}$ 恰好过最高点 $v = 0, F_{\text{弹}} = mg$ 恰好无弹力 $F_{\text{弹}} = 0, v =$	
过最高点的条件	在最高点的 $v \geq \sqrt{gR}$	$v_{\text{低}} \geq \sqrt{5gr}$	$v \geq 0$	
绳、单轨的脱轨临界条件	① $\sqrt{2gr} < v_{\text{低}} < \sqrt{5gr}$ 上半圆脱轨 ② $0 < v_{\text{低}} \leq \sqrt{2gr}$ 最高到圆心等高处的往复运动 ③ $v_{\text{低}} \geq \sqrt{5gr}$ 在竖直面内做完整的圆： 即 $0 < v_{\text{低}} \leq \sqrt{2gr}$ 或 $v_{\text{低}} \geq \sqrt{5gr}$, 不脱轨			

二、竖直面内圆周运动的临界问题



5. 分析竖直平面内圆周运动临界问题的思路



二、竖直面内圆周运动的临界问题

【思考与讨论】如图，固定在水平面上的光滑半圆柱体（截面为半圆）顶端 A 处，小滑块从静止开始沿半圆面下滑至 P 点（图中未画出）离开圆面，已知圆半径为 R ，求 P 点距水平面的高度。

解：设 P 点与圆心的连线 OP 与水平面间夹角为 θ ，小滑块恰好离开圆面， $F_N = 0$

在 P 点 $mg \sin \theta = m \frac{v^2}{R}$

又 $\sin \theta = \frac{H}{R}$

A 至 P 点 $mg(R-H) = \frac{1}{2}mv^2$

故 P 点距水平面的高度 $H = \frac{2}{3}R$

主题三、斜面上圆周运动的临界问题



三、斜面上圆周运动的临界问题

1. 斜面上的转盘模型：

物体在斜面上做**匀速圆周运动**时，设斜面的倾角为 θ ，重力垂直斜面的分力与物体受到的支持力大小相等。

物体在转动过程中，最容易滑动的位置是？

物体在转动过程中，最容易滑动的位置是**最低点**，恰好滑动时：

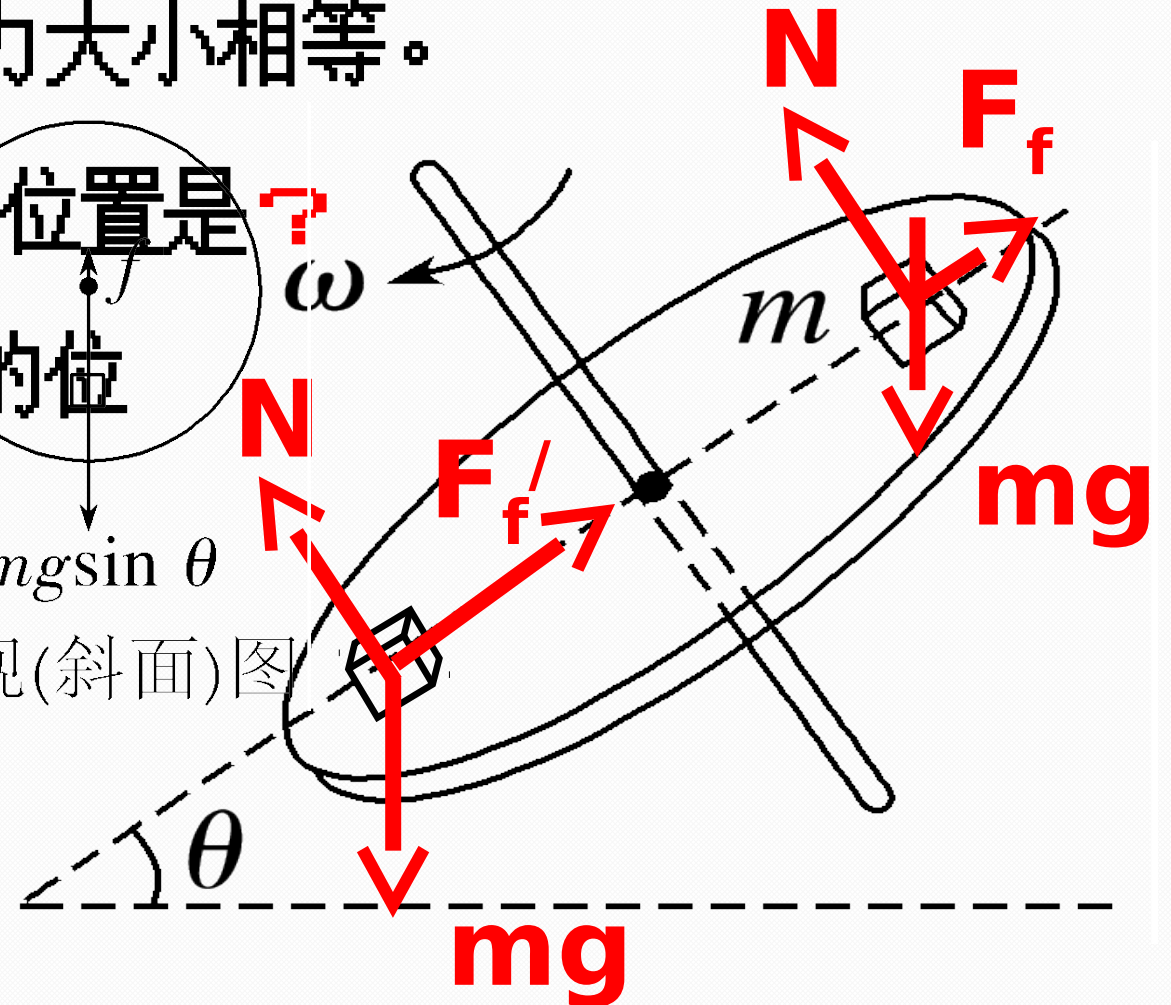
$$\mu mg \cos \theta - mg \sin \theta =$$

立体图

侧视图

$$m\omega_0^2 R = \sqrt{\frac{\mu g \cos \theta - g \sin \theta}{R}}$$

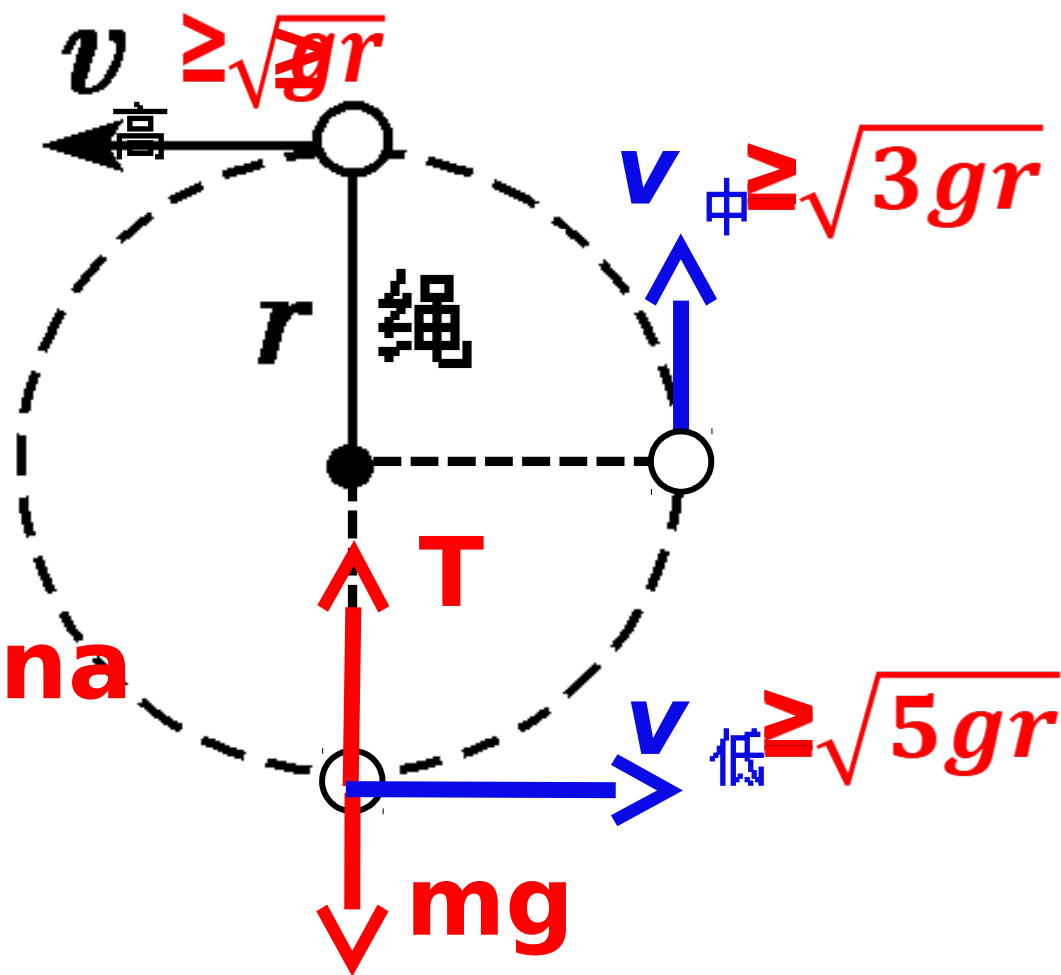
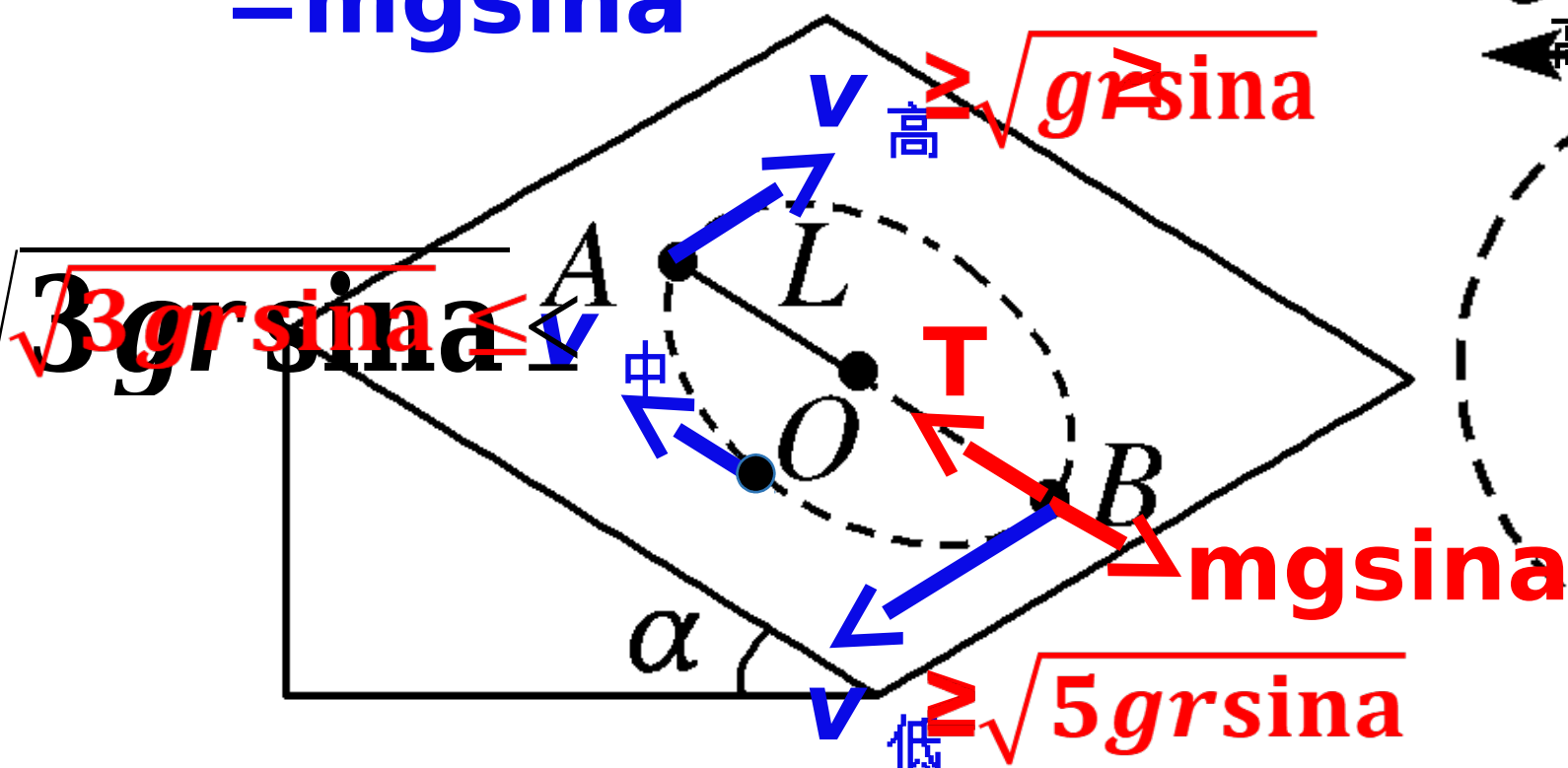
正视(斜面)图



三、斜面上圆周运动的临界问题

2. 斜面上的绳模型：

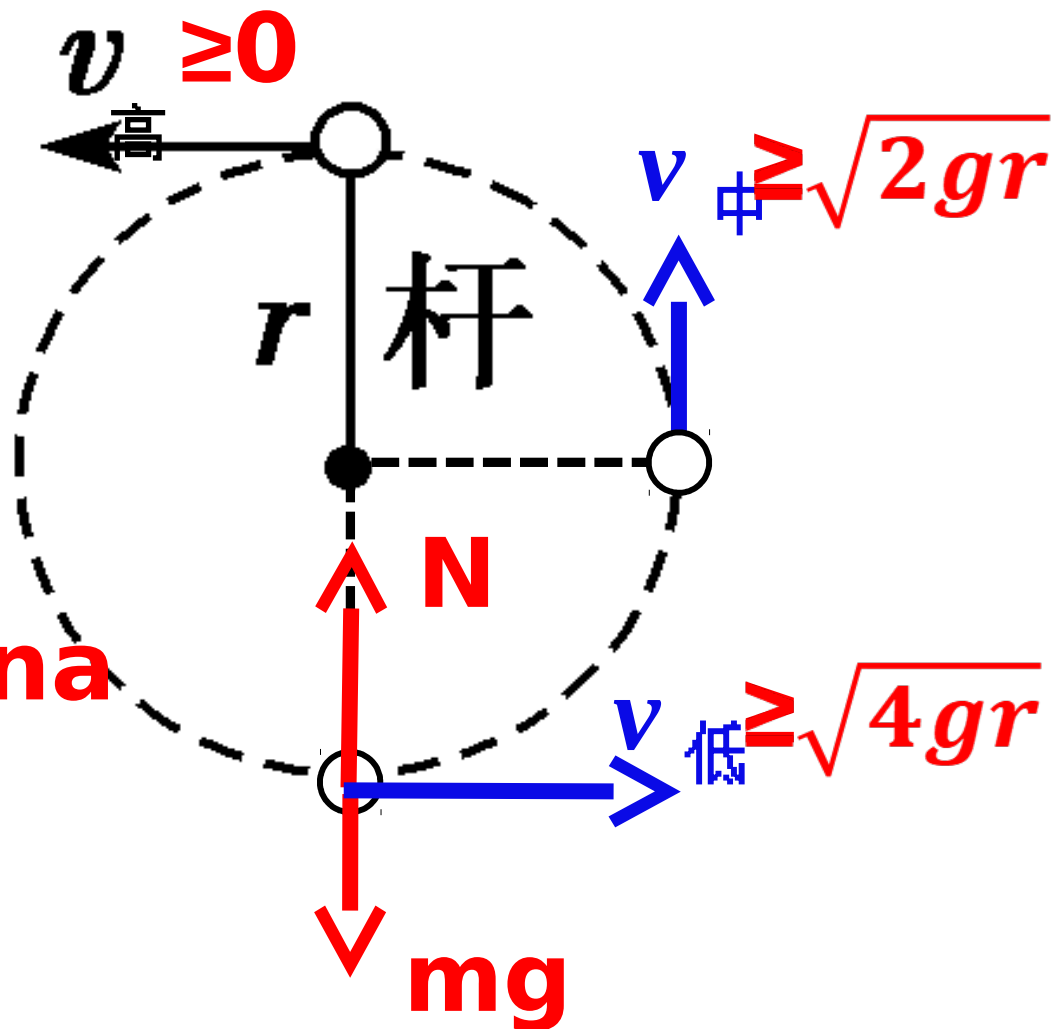
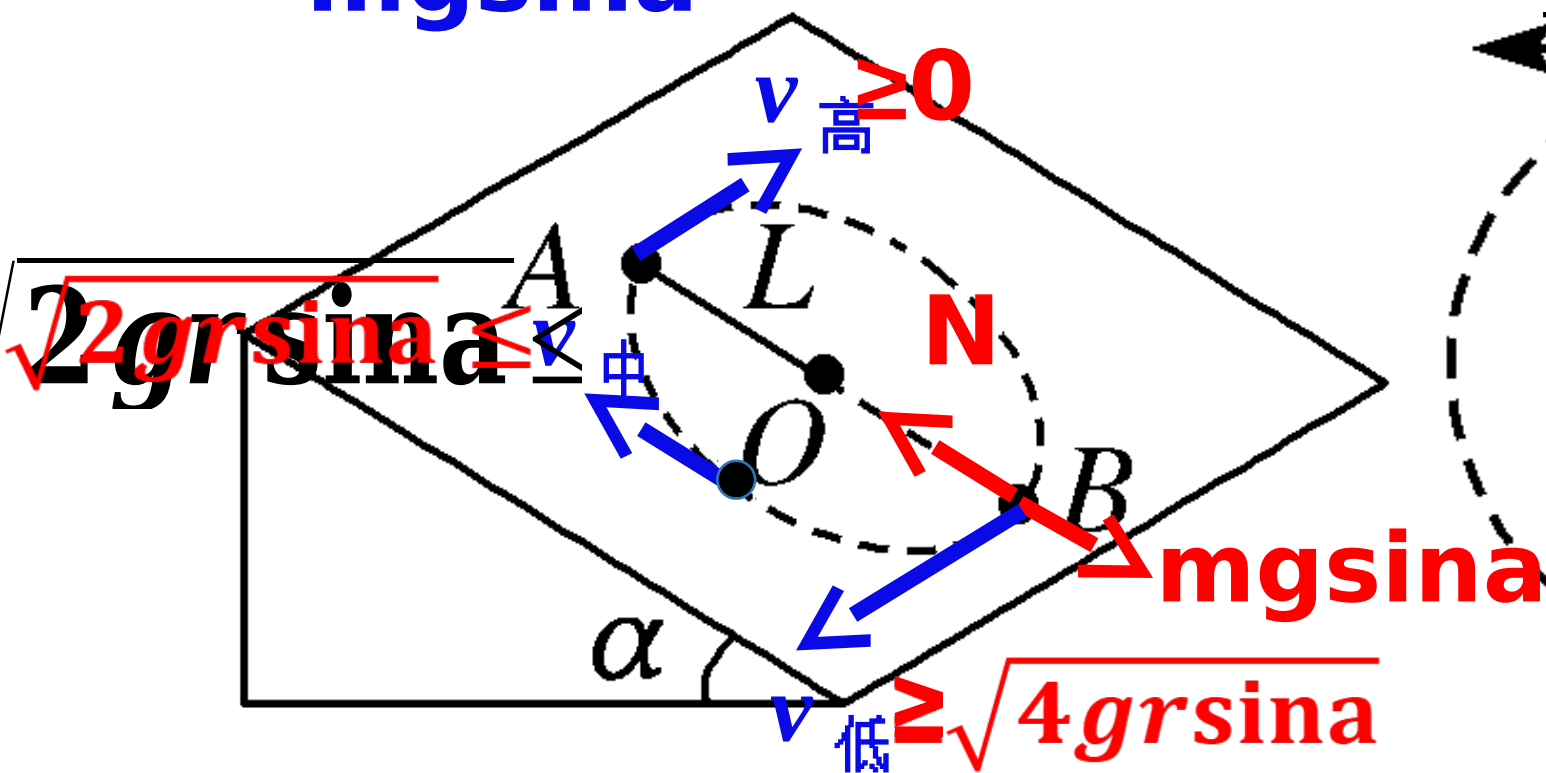
$$mg_{\text{等}} = mgsina \quad g_{\text{等}} = gsina$$



三、斜面上圆周运动的临界问题

3. 斜面上的杆模型：

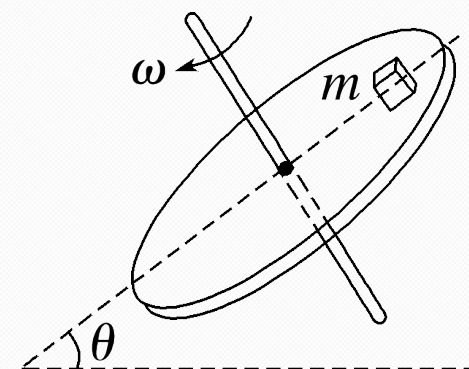
$$mg_{\text{等}} = mgsina \quad g_{\text{等}} = gsina$$



三、斜面上圆周运动的临界问题

【例3】如图所示，一倾斜圆盘可绕通过圆心、垂直于盘面的固定轴以不同的角速度匀速转动，盘面上距转轴 5cm 处有一可视为质点的物块在圆盘上且始终与圆盘保持相对静止。已知物块与盘面间的动摩擦因数为 $\frac{1}{3}$ ，盘面与水平面间的夹角 $\theta = 30^\circ$ ，重力加速度大小 g 取 10 m/s^2 ，设最大静摩擦力等于滑动摩擦力，下列说法正确的是(**C**)

- A. 若圆盘角速度逐渐增大，物块会在最高点发生相对滑动
- B. 圆盘转动时角速度可能为 $5\sqrt{3}\text{ rad/s}$
- C. 物块运动到最高点时所受摩擦力方向一定背离圆心
- D. 物块运动到与圆盘圆心等高点时，摩擦力的方向垂直于物块和圆盘圆心的连线





总复习

圆周运动临界问题分析步骤：分析转速变化过程中，各力的变化规律。当接触面间出现**最大静摩擦力**时或在**弹力为零**时出现临界状态，然后列出向心力方程进行求解。



黄埔教研
HUANGPUJIAOYAN

谢谢

